И. И. ЛИХОЛЕТОВ, И. П. МАЦКЕВИЧ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА“

И. И. ЛИХОЛЕТОВ, И. П. МАЦКЕВИЧ

Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике

Издание третье, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
МИНСК 1976

517
Л 65
УДК[516+517+519](076)

Рекомендовано Министерством высшего и среднего
специального образования БССР
для экономических специальностей вузов

Л $\frac{20203-084}{\text{М } 304(05)-76}$ доп. 76

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 7
Предисловие к первому изданию 8

Часть первая

Аналитическая геометрия

Глава I. Аналитическая геометрия на прямой

§ 1. Координаты на прямой 9
§ 2. Направленные отрезки Величина направленного отрезка. Расстояние между двумя точками Деление отрезка в данном отношении 10

Глава II. Аналитическая геометрия на плоскости

§ 1. Координаты на плоскости 13
§ 2. Расстояние между двумя точками 15
§ 3. Деление отрезка в данном отношении 17
§ 4. Уравнение линии. Построение линии по ее уравнению 19
§ 5. Уравнения прямой с угловым коэффициентом, прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, прямой, проходящей через две данные точки, и прямой в отрезках Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой . . . 23
§ 6. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Нормальное уравнение прямой. Общее уравнение прямой. Точка пересечения двух прямых. Расстояние от точки до прямой 29
§ 7. Смешанные задачи на прямую 38
§ 8. Кривые второго порядка 40
§ 9. Смешанные задачи на кривые второго порядка 56

Глава III. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве

§ 1. Координаты в пространстве 57
§ 2. Элементы векторной алгебры 61
§ 3. Понятие об уравнении поверхности Уравнение линии в пространстве 76
§ 4. Общее уравнение плоскости. Нормальное уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Пересечение плоскостей. Расстояние от точки до плоскости 81

§ 5. Уравнение прямой в пространстве. Пересечение прямой и плоскости 93

Часть вторая

Математический анализ

Глава IV. Введение в анализ

§ 1. Действительные числа и числовая ось. Абсолютная величина числа 104
§ 2. Переменная величина. Функция. Область определения функции. Способы задания функции. Основные элементарные функции и их графики. Сложная функция. Классификация функций. . . 106
§ 3. Некоторые классы функций 113
§ 4. Графики простейших функций 116
§ 5. Числовая последовательность. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел последовательности Предел функции 117
§ 6. Теоремы о бесконечно малых величинах и о пределах Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ 123
§ 7. Раскрытие неопределенностей вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞} 127
§ 8. Смешанные задачи на вычисление пределов 131
§ 9. Сравнение бесконечно малых величин 132
§ 10. Односторонние пределы 135
§ 11. Непрерывность и точки разрыва функции 136

Глава V. Производная и дифференциал функции

§ 1. Производная функция, ее механический и геометрический смысл. Непосредственное нахождение производной 145
§ 2. Производные основных элементарных функций. Производная суммы, произведения и частного функций. 150
§ 3. Производная сложной функции 153
§ 4. Логарифмическая производная 157
§ 5. Производная неявной функции 158
§ 6. Смешанные задачи 160
§ 7. Производные высших порядков 161
§ 8. Применение производной в геометрии и физике 162
§ 9. Дифференциал функции 166
§ 10. Геометрический смысл дифференциала. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям 167

Глава VI. Исследование функций и построение графиков

§ 1. Теоремы Ролля и Лагранжа 169
§ 2. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей 170
§ 3. Возрастающие и убывающие функции 174
§ 4. Максимум и минимум функций. Необходимый признак. Достаточные признаки 176
§ 5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба . . 181
§ 6. Асимптоты 184
§ 7. Построение графиков функций 186
§ 8. Наибольшее и наименьшее значения функции 192

Глава VII. Функции нескольких переменных

§ 1. Функции нескольких переменных и их области определения . . 196
§ 2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных . . 198
§ 3. Частные производные 200
§ 4. Полный дифференциал функции 202
§ 5. Экстремум функции многих переменных 203

Глава VIII. Неопределенный интеграл

§ 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов 205
§ 2. Непосредственное интегрирование 208
§ 3. Метод подстановки (замена переменной) 213
§ 4. Интегрирование по частям 218
§ 5. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен 221
§ 6. Примеры интегралов, не выражающихся элементарными функциями 225
§ 7. Интегрирование рациональных функций 225
§ 8. Интегрирование некоторых иррациональных функций 231
§ 9. Интегрирование тригонометрических функций 232
§ 10. Смешанные примеры на интегрирование 236

Глава IX. Определенный интеграл

§ 1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Простейшие свойства определенного интеграла и его связь с неопределенным интегралом (теорема Ньютона — Лейбница) 237
§ 2. Замена переменной в определенном интеграле 240
§ 3. Интегрирование по частям 242
§ 4. Площадь плоской фигуры 244
§ 5. Длина дуги кривой 250
§ 6. Объем тела вращения 252
§ 7. Приложения определенных интегралов к решению физических задач 255
§ 8 Несобственные интегралы 261
§ 9. Приближенное вычисление определенных интегралов 265

Глава X. Дифференциальные уравнения

§ 1. Основные понятия 269
§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка 271
§ 3. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям 280

Глава XI. Ряды

§ 1. Числовой ряд. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами 282
§ 2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница 291
§ 3. Степенные ряды. Интервал сходимости степенного ряда. Радиус сходимости 295
§ 4. Разложение функций в степенные ряды 298
§ 5. Применение рядов к приближенным вычислениям 303

Часть третья

Теория вероятностей и математическая статистика

Глава XII. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

§ 1. События. Действия над событиями 309
§ 2. Определение частости и вероятности события 311
§ 3. Теорема сложения вероятностей 315
§ 4. Теорема умножения вероятностей 318
§ 5. Формула полной вероятности 320
§ 6. Формула Бейеса 322

Глава XIII. Схема повторных испытаний

§ 1. Формула Бернулли 323
§ 2. Наивероятнейшее число появлений события 326
§ 3. Локальная теорема Лапласа 328
§ 4. Интегральная теорема Лапласа 330

Глава XIV. Случайные величины

§ 1. Дискретные случайные величины 336
§ 2. Непрерывные случайные величины 345

Глава XV. Закон больших чисел

§ 1. Неравенство Маркова 353
§ 2. Неравенство Чебышева 354
§ 3. Теорема Чебышева 357
§ 4. Теорема Пуассона 361

Глава XVI. Статистические распределения

§ 1. Дискретный и интервальный ряды распределения. Полигон и гистограмма 364
§ 2. Кумулятивный ряд. Плотность распределения признака. Кумулянта и огива 368
§ 3. Мода и медиана 371
§ 4. Среднее арифметическое и степенные средние 373
§ 5. Меры рассеивания 375
§ 6. Моменты вариационного ряда 377

Глава XVII. Выборочный метод

§ 1. Теорема Ляпунова 380
§ 2. Повторная и бесповторная выборка 381
§ 3. Критерии согласия 390

Глава XVIII. Теория корреляции

§ 1. Метод наименьших квадратов 394
§ 2. Линейная корреляционная зависимость 399
§ 3. Корреляционное отношение 408
§ 4. Множественная корреляция 411
Ответы 416
Приложения 447
Литература 452

Предисловие ко второму изданию

Настоящее издание по своему содержанию мало чем отличается от предыдущего: лишь часть третья подверглась значительной переработке и в первых двух частях книги внесены некоторые изменения и дополнения.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам кандидатам физико-математических наук М. Б. Аксень, И. Л. Калихману, А. И. Кропотову, Ю. Н. Кузнецову, а также работникам кафедр математики Минского педагогического института, Московского и Ленинградского финансово-экономических институтов, Киевского и Белорусского институтов народного хозяйства за ценные замечания, способствовавшие улучшению настоящего пособия.

Авторы получили письма от студентов заочных факультетов, в которых сообщается, что пособие «Руководство к решению задач» оказало им большую помощь в изучении математики.

Обращаем внимание читателей, что для изучения математики в объеме, содержащемся в настоящем пособии, необходимо еще иметь какой-нибудь учебник по высшей математике, рекомендованный в программе, либо учебным заведением, так как одного «Руководства» к решению задач недостаточно. Известно, что научиться решать задачи можно лишь только тогда, когда будет усвоена теория, с другой стороны, решение задач способствует более глубокому пониманию теории.

Авторы будут признательны за все критические замечания и пожелания. Посылать их можно по адресу: г. Минск, ул. Кирова, 24, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

Предисловие к первому изданию

Руководство предназначено для студентов экономических факультетов всех видов обучения и в особенности заочных и вечерних отделений. В соответствии с программой по высшей математике пособие содержит следующие разделы: элементы аналитической геометрии и векторной алгебры, введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление, теория рядов, математическая статистика и теория вероятностей.

В начале каждого параграфа даны краткие теоретические сведения и примерные решения задач, с тем чтобы последующие задачи студенты могли решить самостоятельно. На вычислительные задачи даны ответы.

При подготовке пособия работа между авторами была распределена следующим образом: И. И. Лихолетов написал первую и вторую части, И. П. Мацкевич написал третью часть и подобрал задачи к главам IV—VII, снабдив их ответами.

При работе над пособием в той или иной степени была использована литература, указанная в прилагаемом списке.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору А. Е. Турецкому и доцентам А. А. Гусаку и Е. А. Иванову за ценные советы и замечания.

Часть первая. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава I Аналитическая геометрия на прямой

§ 1. Координаты на прямой

Для определения положения точки на прямой построим систему координат следующим образом: 1) возьмем на прямой произвольную точку O и назовем ее началом координат (рис. 1); 2) примем какой-нибудь отрезок ($OE = e$) за единицу масштаба; 3) выберем *положительное* направление, которое на

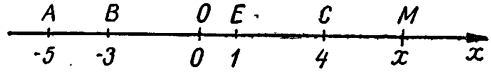


Рис. 1

горизонтальной прямой обычно принимают слева направо; направление, противоположное положительному, назовем *отрицательным*.

В построенной системе координат положение точки M будет определяться числом $x = \frac{OM}{e}$, показывающим расстояние от точки O до точки M, взятым со знаком плюс, если направление от начальной точки O к точке M положительно, и со знаком минус в противном случае.

Это отвлеченное число x называют *координатой* точки M и записывают обычно в таком виде: $M(x)$. Так, координатами точек A, B, O, E, C, M (см. рис. 1) являются соответственно числа -5, -3, 0, 1, 4, x.

Точка считается заданной, если известна ее координата, т. е. некоторое действительное число (рациональное или иррациональное). Поэтому когда мы говорим о точке, имеем в виду число (ее координату), и, наоборот, когда говорим о числе, имеем в виду точку. Таким образом, между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой устанавливается взаимно однозначное соответствие, т. е. каждой

точке на числовой прямой соответствует число и, наоборот, каждому числу соответствует точка.

1. Построить следующие точки: $A(2{,}5)$, $B\left(-1\frac{3}{4}\right)$, $C(\sqrt{2})$, $D(0, (3))$.

Решение. Построение точек A и B очевидно (рис. 2). Для построения точки C отложим от начала координат вправо

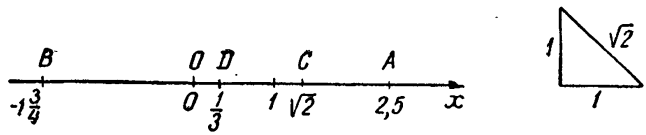


Рис. 2

отрезок, равный $\sqrt{2}$, найденный из равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого равны выбранной нами единице длины. Точка D имеет координату $x = 0$, $(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

2. Построить следующие точки: $A(3)$, $B(-3{,}5)$, $C(\sqrt{3})$, $D(-\sqrt{5})$.

3. Построить точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

1) $x^2 + x - 6 = 0$;
2) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{x+3}{4} - 1$;
3) $x^2 - 1 = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;
5) $6x^3 - x^2 - x = 0$;
6) $x^2 - 8x + 16 = 0$;
7) $x^4 - 16 = 0$;
8) $x^2 + 7x = 0$.

4. Найти координату точки, симметричной с точкой A (2), относительно: 1) начала координат; 2) точки B (—3); 3) точки C (4).

§ 2. Направленные отрезки. Величина направленного отрезка. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

1. Отрезок, у которого указаны начало и конец, называется *направленным отрезком* или *вектором*. Направлением отрезка считается направление от его начала к его концу. Направленный отрезок, началом которого является точка A, а концом — точка B, обозначается так: $\overline{AB}$.

2. *Величиной* направленного отрезка $\overline{AB}$ на оси называется число, равное длине отрезка, взятое со знаком плюс, если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус в противном случае.

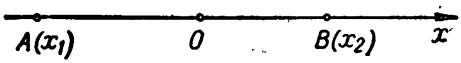


Рис. 3

Величину отрезка $\overline{AB}$ обозначим через AB.

Очевидно, что $AB = -BA$. Длину отрезка $\overline{AB}$ (его модуль) будем обозначать $|AB|$*.

Пусть заданы две точки A и B своими координатами x_1 и x_2, тогда величина AB направленного отрезка $\overline{AB}$ определяется по формуле

$$AB = x_2 - x_1, \quad (1)$$

где x_1 — координата начальной точки; x_2 — координата конечной точки (рис. 3).

3. Расстояние d между двумя точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$, т. е. длина отрезка $\overline{AB}$, находится по формуле

$$d = |x_2 - x_1|. \quad (2)$$

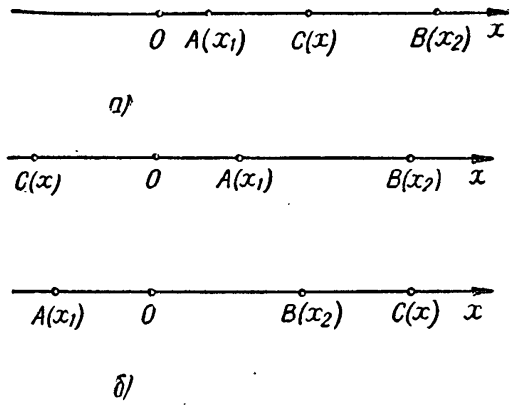


Рис. 4

4. Если на числовой прямой даны две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$, то всякая третья точка $C(x)$ делит отрезок $\overline{AB}$ в некотором отношении

$$\frac{AC}{CB} = \lambda,$$

где AC и CB — величины направленных отрезков $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ (рис. 4, *а*, *б*).

* Если направление отрезка не имеет значения, то иногда его длину будем обозначать без вертикальных черточек.

Говорят, что точка C делит отрезок $\overline{AB}$ внутренним образом, когда она лежит на этом отрезке ($\lambda \geqslant 0$), и внешним образом, когда она лежит на его продолжении ($\lambda < 0$, $\lambda \neq -1$).

Координата точки $C(x)$ находится по формуле

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

В частности, если $\lambda = 1$, то $AC = CB$ и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{4}$$

т. е. координата середины отрезка равна полусумме координат его начала и конца.

5. Найти величины отрезков, определяемых на оси точками $A(2)$ и $B(-5)$, $C(-2)$ и $D(4)$. Первая точка обозначает начало отрезка, а вторая — его конец.

Решение. Применив формулу (1), получим:

$$AB = -5 - 2 = -7; \quad CD = 4 - (-2) = 6.$$

6. Найти расстояние d между точками A и B в каждом из следующих случаев:

1) $A(2)$, $B(3)$; 2) $A(-4)$, $B(-8)$.

Решение. Применив формулу (2), получим:

1) $d = |3 - 2| = 1$; 2) $d = |-8 - (-4)| = 4$.

7. Найти точку C, делящую отрезок между точками $A(-1)$ и $B(5)$ в отношении:

1) $\lambda = \frac{2}{3}$; 2) $\lambda = -2$.

Решение. Применив формулу (3), найдем координату точки C:

$$1)\ x = \frac{-1 + \frac{2}{3} \cdot 5}{1 + \frac{2}{3}} = 1{,}4; \qquad 2)\ x = \frac{-1 + (-2) \cdot 5}{1 + (-2)} = 11.$$

Итак: 1) $C(1{,}4)$; 2) $C(11)$.

8. Найти величину отрезка $\overline{AB}$ в каждом из следующих случаев:

1) $A(1)$, $B(4)$; 2) $A(-2)$, $B(3)$; 3) $A(1{,}5)$, $B(-5{,}4)$; 4) $A(-3)$, $B(-7)$. Проверить результаты построением.

9. Определить расстояние d между точками A и B в каждом из следующих случаев: 1) $A(1)$, $B(-3)$; 2) $A(-4)$, $B(3)$; 3) $A(6)$, $B(2)$; 4) $A(-7)$, $B(-4)$. Проверить результаты построением.

10. Построить точки $A(-5)$, $B(-2)$; $C(1)$, $D(3)$ и найти: 1) величины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$; 2) длины этих отрезков; 3) значение суммы $AB + BC + CD + DA$; 4) значение суммы $|AB| + |BC| + |CD| + |DA|$.

11. Докажите, что при любом расположении точек A, B, C на прямой всегда имеет место соотношение: $AB + BC = AC$. Проверьте справедливость этого равенства для точек:

1) $A(2)$, $B(3)$, $C(5)$; 3) $A(1)$, $B(-2)$, $C(-4)$;
2) $A(-1)$, $B(0)$, $C(-3)$; 4) $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$.

12. Даны три точки: $A(-2)$, $B(3)$, $C(1)$. Определить отношение, в котором каждая из этих точек делит отрезок между двумя другими.

13. Найти точку C, делящую отрезок между точками $A(-2)$ и $B(3)$ в отношении λ, если λ принимает значения 1; $\frac{2}{3}$; 0; $-\frac{1}{2}$; -1; -3.

14. Найти координату точки A, зная, что точка $M(-2)$ делит отрезок между точками $A(x)$ и $B(4{,}5)$ в отношении $\lambda = -\frac{3}{2}$.

15. Найти координату x середины отрезка $\overline{AB}$ в каждом из следующих случаев: 1) $A(2)$, $B(5)$; 2) $A(-4)$, $B(9)$; 3) $A(9)$, $B(-9)$.

Глава II Аналитическая геометрия на плоскости

§ 1. Координаты на плоскости

Чтобы определить положение точки на плоскости, построим прямоугольную декартову систему координат следующим образом: 1) возьмем две взаимно перпендикулярные направленные прямые и назовем их *осями координат*. Ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*. Положительное направление каждой из осей координат указывается стрелкой (рис. 5); 2) точка пересечения осей координат O называется *началом системы координат;* 3) выберем какой-нибудь отрезок ($OE = e$) за единицу масштаба (обычно для обеих осей принимают одну и ту же единицу масштаба).

Положение точки M в построенной системе координат

(см. рис. 5) определяется парой чисел x и y, называемых *координатами* этой точки. Абсцисса точки M: $x = \frac{OA}{e}$, где OA — величина направленного отрезка $\overline{OA}$ на оси Ox, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с проекцией точки M на эту ось. Ордината точки M: $y = \frac{OB}{e}$, где OB — величина направленного отрезка $\overline{OB}$ на оси Oy, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с проекцией точки M на эту ось. Каждой точке M на плоскости соответствует пара чисел $(x; y)$ и, наоборот, каждой паре чисел $(x; y)$ соответствует точка M на этой плоскости.

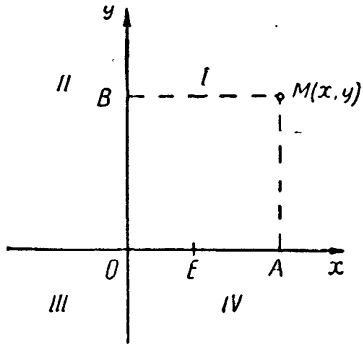


Рис. 5

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости и множеством пар чисел, взятых в определенном порядке.

Если числа x и y — координаты точки M, то это записывают так: $M(x; y)$.

Заметим, что оси координат делят плоскость на четыре части, называемые *четвертями* или *квадрантами*. Координаты точек различных квадрантов имеют разные знаки:

Квадрант	Знаки координат	
	x	y
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю; если точка лежит на оси ординат, то ее абсцисса равна нулю; если точка находится в начале координат, то ее обе координаты x и y равны нулю.

16. Построить точку $M(-4; 3)$.

Решение. На оси Ox отложим отрезок $\overline{OP}$, величина которого равна -4, а на оси Oy — отрезок $\overline{OQ}$, по величине равный 3.

Через точку P проведем прямую, параллельную оси Oy, а через точку Q — прямую, параллельную оси Ox. Точка пересечения этих двух прямых и будет искомой точкой M (рис. 6).

17. Построить следующие точки: $A(2; 3)$, $B(3{,}5; 4)$, $C(-3; 5)$, $D(-1; -2)$, $E(\sqrt{5}; \sqrt{3})$, $F(0; -5)$, $H(-3; 0)$.

18. Построить точки, координаты которых удовлетворяют следующим системам уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 80, \\ x + y = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2y = 0. \end{cases}$

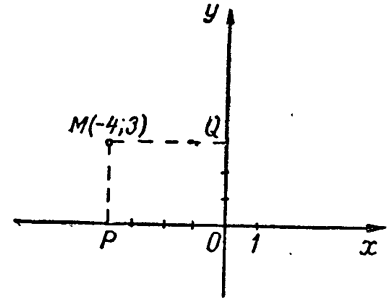


Рис. 6

19. Построить точки, абсциссы которых равны -2; -1; 0; 1; 3, а ординаты определяются из уравнений: 1) $y = 5x - 2$; 2) $y = x^2 + 1$.

20. Дана точка $A(3; -2)$. Построить точки, симметричные ей относительно: 1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) начала координат; 4) биссектрисы четвертого координатного угла. Найти координаты этих точек.

21. Найти точку, симметричную точке $(3; -5)$ относительно биссектрисы третьего координатного угла.

22. Дан квадрат, сторона которого равна 2 единицам масштаба. Чему будут равняться координаты его вершин, если оси координат направить по диагоналям этого квадрата?

23. Найти координаты вершин прямоугольника, стороны которого равны a и b, зная, что начало координат помещено в точке пересечения диагоналей прямоугольника, а оси координат параллельны его сторонам.

24. Высота равнобедренного треугольника, равная 8, принята за ось ординат, а его основание, равное 5, принято за ось абсцисс. Найти координаты вершин треугольника.

§ 2. Расстояние между двумя точками

Расстояние d между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ (длина отрезка $\overline{AB}$ или отрезка $\overline{BA}$) равняется корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек, т. е.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

В частности, расстояние d точки $M(x; y)$ от начала координат $O(0; 0)$ (т. е. длина отрезка $\overline{OM}$) находится по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (2)$$

25. Найти расстояние между точками: $A(2; -3)$ и $B(-1; 1)$; $C(-3; 4)$ и $D(5; -2)$; $O(0; 0)$ и $E(1; -4)$.

Решение. Воспользовавшись формулами (1) и (2), получим:

длина $AB = \sqrt{(-1-2)^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{25} = 5$;

длина $CD = \sqrt{[5-(-3)]^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{100} = 10$;

длина $OE = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.

26. Узнать, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $A(1; 2)$, $B(-3; 4)$, $C(0; -2)$ тупой угол.

Решение. Воспользовавшись формулой (1), найдем длины сторон треугольника:

$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5};$$

$$BC = \sqrt{3^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5};$$

$$AC = \sqrt{1^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}.$$

Найдем квадраты длин сторон треугольника ABC: $AB^2 = 20$, $BC^2 = 45$, $AC^2 = 17$. Отсюда видно, что $BC^2 > AB^2 + AC^2$, следовательно, $\angle BAC$, лежащий против стороны BC, тупой, так как он лежит против большей стороны, квадрат которой превосходит сумму квадратов двух других сторон треугольника.

27. Определить расстояние от точки $A(6; -3)$ до начала координат.

28. Найти расстояние между двумя точками: 1) $A(3; 10)$ и $B(2; 4)$; 2) $C(-2; 3)$ и $D(0; -1)$; 3) $E(-3{,}4; -1)$ и $F(2; -2)$; 4) $M(0; 2)$ и $N(0; -6)$.

29. Построить треугольник с вершинами $A(3; 2)$, $B(0; 1)$, $C(3; 5)$ и найти длины его сторон. Какой угол в этом треугольнике тупой?

30. Доказать, что треугольник, заданный вершинами $A(0; 0)$, $B(3; 3)$, $C(6; -6)$, прямоугольный.

31. Доказать, что треугольник, имеющий своими вершинами точки $A(-3; -2)$, $B(1; 4)$, $C(-5; 0)$, равнобедренный.

32. Найти координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого $A(2; 0)$, $B(3; -1)$, $C(0; -2)$.

33. Найти точку, равноудаленную от точек (2; 3), (5; 6) и находящуюся от начала координат на расстоянии, равном $\sqrt{50}$.

34. На осях координат найти точки, каждая из которых равноудалена от точек (1; 1) и (3; 7).

35. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точки $(-4; 4)$ и от начала координат.

36. Найти точку, равноудаленную от точек $(0; 0)$, $(2; 2)$, $(0; 2)$.

37. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точек $A(3; -4)$ и $B(-2; 1)$.

38. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек $A(0; 5)$ и $B(-2; -2)$.

§ 3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть две различные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются концами отрезка $\overline{AB}$. Координаты точки $C(x; y)$, делящей отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$ $(\lambda \neq -1)$, где AC и CB — величины направленных отрезков $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ оси, проведенной через точки A и B, определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1}$$

В частности, если точка $C(x; y)$ делит отрезок $\overline{AB}$ пополам, то $\lambda = 1$, и тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tag{2}$$

т. е. координаты середины отрезка равны полусуммам координат его начала и конца.

39. Отрезок прямой с концами в точках A (3; 2) и B (12; 8), разделен на три равные части. Определить координаты точек деления и длину отрезка $\overline{AB}$.

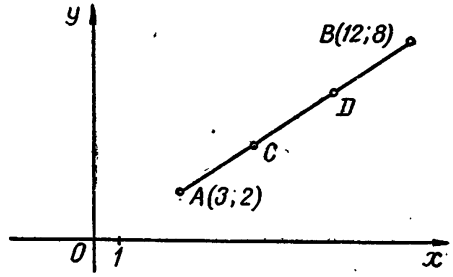


Рис. 7

Решение. Воспользуемся формулой (1).

Для точки C (рис. 7) отношение $\frac{AC}{CB} = \lambda = \frac{1}{2}$. Следовательно, координаты точки C выразятся так:

$$x = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot 12}{1 + \frac{1}{2}} = 6; \quad y = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 8}{1 + \frac{1}{2}} = 4.$$

Для точки D отношение $\frac{AD}{BD} = \lambda = \frac{2}{1} = 2$. Следовательно, по формуле (1)

$$x = \frac{3 + 2 \cdot 12}{1 + 2} = 9; \quad y = \frac{2 + 2 \cdot 8}{1 + 2} = 6.$$

Координаты точки D можно найти проще, если учесть, что точка D есть середина отрезка $\overline{CB}$, координаты концов которого нам уже известны. Воспользуемся формулой (2), тогда

$$x = \frac{6 + 12}{2} = 9; \quad y = \frac{4 + 8}{2} = 6.$$

Итак, отрезок $\overline{AB}$ делится на три равные части точками $C(6; 4)$ и $D(9; 6)$. Длина $AB = \sqrt{(12 - 3)^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{117} \approx 10{,}82$.

40. Отрезок $\overline{AB}$ с концами в точках $A(-3; 2)$ и $B(4; -5)$ делится точкой C в отношении $\lambda = -3$. Найти координаты точки деления.

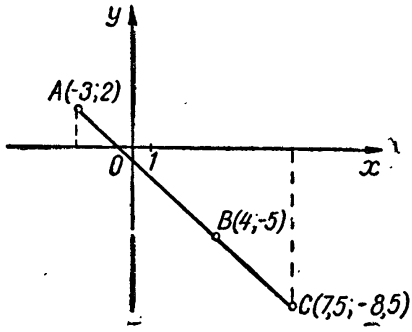


Рис. 8

Решение. Воспользовавшись формулой (1), получим:

$$x = \frac{-3 + (-3) \cdot 4}{1 + (-3)} = 7{,}5;$$

$$y = \frac{2 + (-3)(-5)}{1 + (-3)} = -8{,}5.$$

Итак, искомая точка $C(7{,}5; -8{,}5)$ делит отрезок $\overline{AB}$ внешним образом в отношении $\frac{AC}{CB} = \lambda = -3$ (рис. 8). Заметим, что величины AC и CB имеют противоположные знаки.

41. Найти координаты точки M, делящей отрезок $\overline{AB}$ с концами в точках $A(-2; -3)$ и $B(2; 4)$ в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$.

42. Найти координаты середины отрезка $\overline{AB}$, если: 1) $A(2; 5)$, $B(-3; 8)$; 2) $A(-1; 4)$, $B(2; -6)$; 3) $A(0; 0)$, $B(1; 1)$.

43. Найти точку, симметричную точке $A(x_1; y_1)$ относительно точки $M(x_2; y_2)$.

44. Даны середины сторон треугольника $M(3; 2)$, $P(-2; 0)$, $Q(1; 3)$. Найти его вершины.

45. Найти середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(4; 5)$.

46. Найти расстояние от точки $(3; -4)$ до середины отрезка, концы которого $(1; 2)$ и $(5; 4)$.

47. Проведен отрезок от точки $(1; -1)$ до точки $(-4; 5)$. До какой точки нужно продолжить его в том же направлении, чтобы его длина удвоилась?

48. Отрезок $\overline{AD}$ разделен на три равные части. Точки деления заданы: $B(0; -1)$, $C(2; -3)$. Найти координаты концов отрезка $\overline{AD}$.

49. Даны вершины треугольника: $A(5; 3)$, $B(2; -1)$, $C(1; 4)$. Определить длины медиан и вычислить координаты точки их пересечения.

50. Даны точки $A(1; -1)$ и $B(4; 5)$. До какой точки нужно продолжить отрезок $\overline{AB}$ (в направлении от A к B), чтобы получился отрезок, длина которого была бы в три раза больше длины отрезка $\overline{AB}$?

51. Найти точку, делящую отрезок между точками $P_1(-2; 3)$ и $P_2(4; 6)$ в отношении $\lambda = \frac{2}{3}$.

52. В точках $A(4; 6)$ и $B(-2; 7)$ помещены грузы весом соответственно 60 и 40 $Г$. Найти координаты центра тяжести этой системы.

53. В точках $A(2; -3)$ и $B(5; 3)$ приложены параллельные силы, соответственно равные 20 и 30 $кГ$. На отрезке AB найти точку приложения равнодействующей.

54. Даны вершины треугольника: $A(3; 2)$, $B(6; -2)$, $C(-5; -4)$. Найти точку пересечения биссектрисы угла A со стороной BC и ее длину AD.

55. В точках $A(-1; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(4; -5)$ помещены грузы весом соответственно 30, 50 и 70 $Г$. Определить центр тяжести этой системы.

56. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике длина медианы, соединяющей вершину прямого угла с серединой гипотенузы, равна половине гипотенузы.

57. Разделить отрезок, заключенный между точками $A(0; 2)$ и $B(8; 0)$, в таком же отношении, в каком находятся расстояния этих точек от начала координат.

§ 4. Уравнение линии. Построение линии по ее уравнению

Геометрическим местом точек называется множество точек, обладающих каким-либо общим для них геометрическим свойством, причем точки, не принадлежащие этому множеству, указанным свойством не обладают.

Линию на плоскости можно рассматривать как геометрическое место точек. Например, *окружностью* называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной данной точки, называемой центром; *биссектрисой* угла называется геометрическое место точек, каждая из которых находится на одина-

ковом расстоянии от его сторон; *перпендикуляр*, проведенный через середину данного отрезка, есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка, и т. п.

Уравнением линии на плоскости называется такое уравнение между переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей ей.

Уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат имеет такой вид: $y = f(x)$ или $F(x, y) = 0$ (уравнение, не решенное ни относительно y, ни относительно x). Переменные x и y называются *текущими координатами*. Они могут принимать значения, равные координатам любой точки данной линии.

В аналитической геометрии приходится решать две основные задачи: 1) дана линия как геометрическое место точек, требуется составить ее уравнение; 2) дано уравнение, требуется построить линию, изображаемую этим уравнением.

58. Найти уравнение окружности с центром в точке $C(2; 3)$ и радиусом $R = 5$ (рис. 9). Лежат ли на этой окружности точки $A(5; 7)$, $B(6; 0)$, $E(-1; 5)$ и $D(1; -3)$?

Решение. По определению окружности расстояние любой точки $M(x; y)$, лежащей на ней, от ее центра $C(2; 3)$ равно длине радиуса $R = 5$, т. е. $CM = R$ или $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=5$, отсюда $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$. Можно записать и так: $(x-2)^2 + (y-3)^2 - 25 = 0$.

Мы получили уравнение искомой окружности. Нетрудно видеть, что это уравнение имеет вид

$$F(x, y) = 0.$$

Чтобы проверить, лежит ли данная точка на окружности, надо в уравнение кривой подставить вместо текущих координат значения координат этой точки; если окажется, что координаты точки удовлетворяют данному уравнению, то точка лежит на кривой, в противном случае не лежит. Так, точка A имеет координаты $x = 5$ и $y = 7$. Подставив эти значения в уравнение окружности, получим: $(5-2)^2 + (7-3)^2 = 25$, т. е. $25 = 25$.

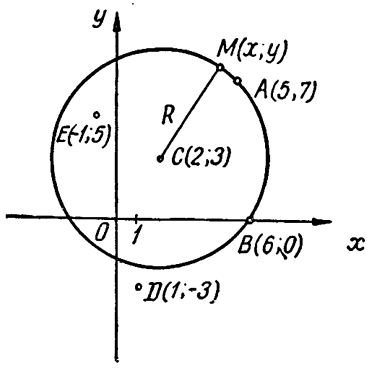


Рис. 9

Отсюда видно, что точка $A(5; 7)$ лежит на окружности, так как ее координаты удовлетворяют уравнению окружности.

Точка $B(6; 0)$ также лежит на окружности, так как

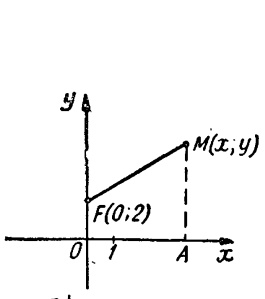
$$(6-2)^2+(0-3)^2=25.$$

Точка $E(-1; 5)$ не лежит на окружности, так как

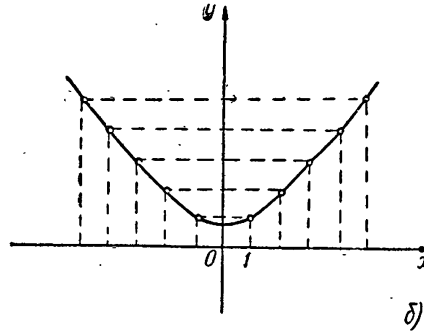
$$(-1-2)^2+(5-3)^2\neq 25,$$

т. е. координаты точки $E(-1; 5)$ не удовлетворяют данному уравнению. Эта точка лежит внутри круга, границей которого является данная окружность, так как расстояние от точки до центра круга меньше длины радиуса, т. е.

$$\sqrt{3^2+2^2}<5.$$



а)



б)

x	y
0	1
1	1 1/4
2	2
3	3 1/4
4	5
5	7 1/4
-1	1 1/4
-2	2
-3	3 1/4
-4	5

в)

Рис. 10

Точка $D(1; -3)$ лежит вне круга, так как расстояние от этой точки до центра $C(2; 3)$ больше длины радиуса, т. е.

$$\sqrt{(1-2)^2-(-3-3)^2}>5.$$

59. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Ox и от точки $F(0; 2)$. Построить кривую.

Решение. Пусть $M(x; y)$ — подвижная точка, описывающая кривую (координаты x и y текущие). Тогда по условию задачи расстояния точки M от оси Ox и от точки F одинаковы (рис. 10, *а*), т. е. $AM=FM$ или

$$y=\sqrt{x^2+(y-2)^2},$$

отсюда $y^2=x^2+(y-2)^2$.

Полученное уравнение приведем к виду $y=f(x)$, т. е. решим его относительно y. Окончательно будем иметь

$$y=\frac{x^2}{4}+1.$$

Это уравнение параболы. Построим эту кривую. Будем придавать различные значения x и из уравнения находить соответствующие значения y. Получим несколько пар значений $(x; y)$. Результаты вычислений запишем в виде таблицы (10, *в*).

Теперь построим в прямоугольной системе координат точки, соответствующие парам чисел таблицы, и соединим их плавной кривой (рис. 10, *б*).

60. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Oy и от точки $F(4; 0)$. Построить кривую.

61. Найти уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом $R = 6$. Лежат ли на этой окружности точки $A(0; 6)$, $B(-6; 0)$, $C(4; 3)$, $D(1; 6)$, $E(5; \sqrt{11})$? Построить кривую.

62. Какой геометрический образ соответствует уравнению

$$(x^2 - 9)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0?$$

63. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от двух данных точек: $A(0; -2)$ и $B(1; 3)$. Построить линию по ее уравнению.

64. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от начала координат и точки $A(4; 1)$. Лежат ли на этой линии точки $B(1; 1)$, $C\left(\frac{17}{8}; 0\right)$, $D(5; 12{,}5)$, $E(2; 0{,}5)$?

65. Найти уравнение геометрического места точек, каждая из которых удалена от оси Ox на расстояние в 5 раз большее, чем от оси Oy.

66. Составить уравнение геометрического места точек, расстояние которых от оси Oy в три раза больше, чем от оси Ox.

67. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Oy и от точки $A(6; 5)$.

68. Проверить, проходит ли кривая, заданная уравнением $4x^2 - 5xy + 2y - 10 = 0$, через точки $A(0; 5)$, $B(2; 4)$, $C(1; 2)$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат.

69. Найти уравнения биссектрис координатных углов.

70. Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых расстояние от точки $A(4, 0)$ вдвое больше, чем от точки $B(1; 0)$.

71. Построить линии, данные уравнениями:

1) $y = \cos x$; 2) $y = 2^x$; 3) $y = \log_2 x$; 4) $y = 2x$;
5) $y = x$; 6) $y = -2x$; 7) $y = x^3$; 8) $y = x^4$;
9) $y = x^5 + 2$; 10) $y^2 = x^3$.

72. Определить точки пересечения с осями координат линий:

1) $4x + y - 5 = 0$; 2) $y = 3x^2 - 4$; 3) $y^2 = x - 4$;
4) $y = 2x - 3$; 5) $2x + 3y = 0$; 6) $y = \sin x$;
7) $y = -2x - 3$; 8) $y = x^3 + 2$.

Построить эти линии.

§ 5. Уравнения прямой с угловым коэффициентом, прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, прямой, проходящей через две данные точки, и прямой в отрезках. Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой

1. Угол α, образованный прямой l с положительным направлением оси Ox, называется *углом наклона* данной прямой (рис. 11).

Условимся угол α отсчитывать от положительного направления оси Ox к прямой l против часовой стрелки. Поэтому будем считать, что $0 \leqslant \alpha < \pi$.

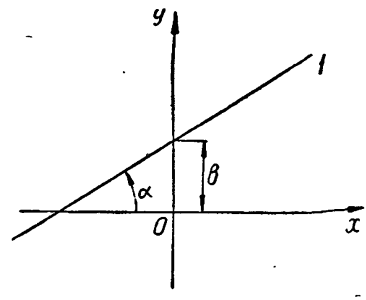


Рис. 11

Угловым коэффициентом прямой называют тангенс угла наклона и обозначают его обычно буквой k ($\operatorname{tg}\alpha = k$).

Буквенные постоянные, входящие в уравнение линии, называются *параметрами*.

Уравнение прямой, не параллельной оси Oy, с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где b и k — параметры (b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy; k — угловой коэффициент прямой); x и y — текущие координаты.

Уравнение прямой, параллельной оси абсцисс ($k = 0$) с начальной ординатой b, имеет вид

$$y = b. \tag{2}$$

Если $b = 0$, то $y = 0$ есть уравнение оси абсцисс.

Уравнение прямой, параллельной оси ординат, имеет вид

$$x = a, \tag{3}$$

где a — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси абсцисс.

Если $a = 0$, то $x = 0$ есть уравнение оси ординат.

2. Уравнение прямой, не параллельной оси Oy, проходящей через данную точку $A(x_1; y_1)$ в заданном направлении, можно записать так:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{4}$$

Если угловой коэффициент k в уравнении (4) рассматривать как переменную величину, то это уравнение будет уравнением пучка прямых, проходящих через данную точку.

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ можно записать так:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ (x_2\neq x_1,\ y_2\neq y_1). \tag{5}$$

Из уравнения (5) следует, что угловой коэффициент данной прямой определяется координатами двух любых точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, принадлежащих этой прямой, по формуле

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{6}$$

4. Уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{7}$$

где a и b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

5. Из уравнения (5) следует, что если три данные точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ лежат на одной прямой, не параллельной координатной оси, то выполняется условие

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}. \tag{8}$$

73. Найти уравнение прямой, образующей с осью Ox угол 135° и пересекающей ось Oy в точке (0; 5). Выяснить, проходит ли эта прямая через точки $A(2; 3)$ и $B(2; -3)$. Построить прямую.

Решение. Из условия задачи следует, что отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, $b=5$, угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}135°=-1$. Следовательно, по формуле (1) имеем

$$y=-x+5.$$

Подставляя в искомое уравнение прямой координаты точки A вместо текущих координат, получим

$$3=-2+5,\ \text{т. е. } 3=3.$$

Так как координаты точки A удовлетворяют уравнению прямой, то прямая проходит через эту точку.

Подставляя в уравнение координаты точки B, получим

$$-3\neq-2+5,\ \text{т. е. } -3\neq 3.$$

Координаты точки B не удовлетворяют уравнению, следовательно, прямая не проходит через точку B.

Известно, что положение прямой определяется двумя точками, принадлежащими ей. Поэтому для построения прямой по ее уравнению можно найти любые две точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, построить их и через них провести прямую. Построенная прямая будет искомой.

Пусть $x=1$, тогда $y=-1+5=4$, если $x=-2$, то $y=2+5=7$.

Таким образом, мы получили две точки $P(1; 4)$ и $Q(-2; 7)$. Построим эти точки и через них проведем прямую (рис. 12).

Заметим, что уравнение данной прямой содержит свободный член, следовательно, эта прямая пересекает оси координат. Найдем точки пересечения прямой с осями координат и проведем через них искомую прямую. Такой способ построения прямой проще.

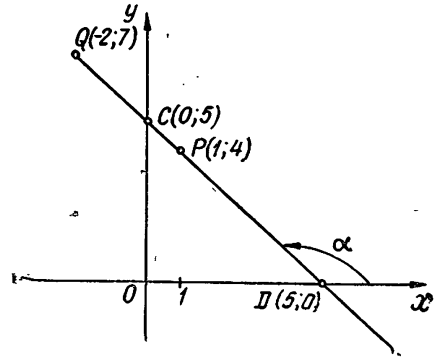


Рис. 12

Чтобы найти точку пересечения прямой с осью Oy, надо в уравнении положить $x = 0$ (любая точка, лежащая на оси ординат, имеет абсциссу, равную 0), тогда $y = 5$. Обозначим эту точку буквой $C(0; 5)$. Теперь пусть $y = 0$ (любая точка, лежащая на оси абсцисс, имеет ординату, равную 0), тогда $0 = -x + 5$, $x = 5$. Обозначим эту точку буквой $D(5; 0)$. Построим эти точки и проведем через них искомую прямую (см. рис. 12).

74. Построить прямую $y = 3x$.

Построение. Прямая проходит через начало координат, т. е. она проходит через точку $O(0; 0)$. Найдем вторую любую точку, координаты которой удовлетворяют уравнению данной прямой.

Пусть $x = 1$, тогда $y = 3$ и, следовательно, вторая точка будет $A(1; 3)$. Через точки O и A проводим искомую прямую, уравнение которой $y = 3x$ (рис. 13).

75. Написать уравнение прямой, параллельной оси Ox и отсекающей от оси Oy отрезок, равный -2. Проверить, лежат ли на этой прямой точки $A(2; -2)$ и $B(3; 2)$.

Решение. Согласно условию задачи, угловой коэффициент $k = 0$, начальная ордината $b = -2$, следовательно, искомое уравнение прямой $y = -2$. Нетрудно видеть, что координаты любой точки $M(x; -2)$ удовлетворяют этому уравнению.

Точка A лежит на искомой прямой, так как координаты ее удовлетворяют уравнению прямой $y = -2$. Точка B не лежит на прямой, так как координаты ее не удовлетворяют уравнению прямой $y = -2$ (рис. 14).

76. Написать уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей от оси Ox отрезок, равный 3. Проверить, лежат ли на этой прямой точки $A(3; 4)$ и $B(-3; 2)$.

Решение. Согласно условию задачи, искомое уравнение

прямой $x = 3$. Заметим, что координаты любой точки $M(3; y)$ удовлетворяют этому уравнению. Точка A лежит на искомой прямой, так как координаты ее удовлетворяют уравнению прямой $x = 3$. Точка B не лежит на этой прямой, так как координаты ее не удовлетворяют уравнению прямой $x = 3$ (рис. 15).

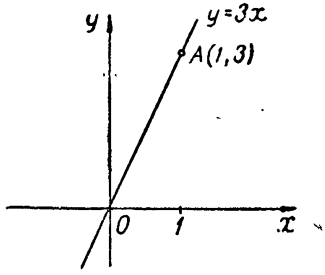


Рис. 13

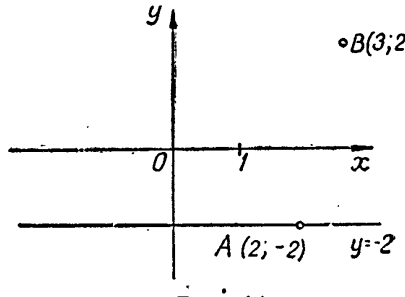


Рис. 14

77. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (2; 2) и составляющей с осью Ox угол 60°.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении (4). Согласно условию, $k = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, следовательно, искомое уравнение прямой будет

$$y - 2 = \sqrt{3}(x - 2) \text{ или } y = x\sqrt{3} + 2(1 - \sqrt{3}).$$

78. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $M(2; -1)$ и $P(-1; 8)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки (5). Подставляя в уравнение вместо x_1, y_1, x_2, y_2 координаты точек M и P, получаем

$$\frac{y - (-1)}{8 - (-1)} = \frac{x - 2}{-1 - 2},$$

отсюда

$$\frac{y + 1}{9} = \frac{x - 2}{-3} \text{ или } y + 1 = -3(x - 2),$$

т. е.

$$y = -3x + 5.$$

Искомое уравнение прямой мы привели к уравнению с угловым коэффициентом, т. е. к уравнению вида $y = kx + b$.

Таким образом, угловой коэффициент искомой прямой $k = -3$ и начальная ордината $b = 5$.

Угловой коэффициент можно найти также и по формуле (6):

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - (-1)}{-1 - 2} = -3.$$

79. Написать уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки, величины которых соответственно равны 3 и -5.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой в отрезках (7). Согласно условию, $a = 3$, $b = -5$, следовательно (рис. 16),

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1 \text{ или } \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1.$$

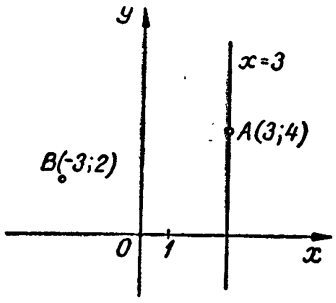


Рис. 15

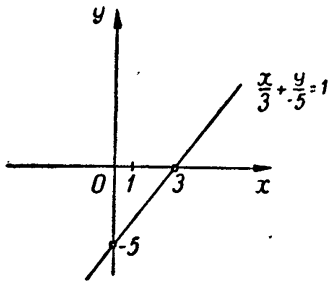


Рис. 16

80. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки: 1) $A(1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(3; 6)$; 2) $D(2; 3)$, $E(-2; 1)$, $F(3; 4)$.

Решение. Проверим выполнение условия (8).

$$1)\ \frac{6-2}{4-2} = \frac{3-1}{2-1} \text{ или } \frac{4}{2} = \frac{2}{1}.$$

Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой, выполнено, следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой.

$$2)\ \frac{4-3}{1-3} \neq \frac{3-2}{-2-2} \text{ или } \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}.$$

Условие (8) не выполнено, следовательно, точки D, E, F не лежат на одной прямой.

81. Прямая пересекает ось Ox в некоторой точке M и проходит через точки $A(-2; 5)$ и $B(3; -3)$. Найти координаты точки M.

Решение. Точки $A(-2; 5)$, $B(3; -3)$, $M(x; 0)$ лежат на одной прямой, следовательно, должно выполняться условие (8):

$$\frac{0-5}{-3-5} = \frac{x-(-2)}{3-(-2)} \text{ или } \frac{5}{8} = \frac{x+2}{5},$$

отсюда $x = 1\frac{1}{8}$. Точка $M\left(\frac{9}{8}; 0\right)$ искомая.

82. Построить прямые, заданные следующими уравнениями:

1) $y = \frac{1}{2}x$; 2) $y = 3x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = 5$;

5) $x = -6$; 6) $y + x = 0$; 7) $2x + 3 = 0$; 8) $y = 2x - 3$.

83. Проходит ли прямая $y = 3x + 13$ через точки $A(5; -1)$, $B(-4; 1)$, $C(3; 2)$, $D(5; 7)$, $E(-5; -2)$?

84. Составить уравнение геометрического места точек, расстояние каждой из которых от прямой $x = 3$ равно расстоянию от точки $(4; -2)$.

85. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от прямой $x = -3$.

86. Найти уравнение прямой, образующей с осью Ox угол 120° и пересекающей ось Oy в точке $(0; 5)$.

87. Найти уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок, равный -5.

88. Найти уравнение прямой, образующей с осью Ox угол 60° и пересекающей ось Oy в точке $(0; -4)$.

89. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $(2; 3{,}1)$ и составляющей с осью Ox угол 45°. Написать уравнение этой прямой.

90. Найти уравнение прямой, параллельной оси Ox и пересекающей ось Oy в точке $(0; 3)$.

91. Найти уравнение прямой, параллельной оси Oy и пересекающей ось Ox в точке $(-5; 0)$.

92. Составить уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент 3 и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 4.

93. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 3)$ и имеющей угловой коэффициент, равный -5.

94. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(1; -3)$ и образующей с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg} 2$.

95. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ и образующей с осью Ox угол 0°.

96. Равнобедренная трапеция с основаниями 6 и 2 *см* имеет острый угол 45°. Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание и за ось Oy — ось симметрии трапеции.

97. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(3; 4)$. Выбрать из этого пучка прямые, составляющие с осью Ox углы: 1) 0°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 135°, и построить их.

98. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки, равные 3 и 5.

99. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(4; -5)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью 5 кв. единиц.

100. Какая зависимость должна быть между коэффициентами a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ образовала с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°?

101. Найти площадь треугольника, образующегося при пересечении прямой $3x + 4y - 12 = 0$ и осей координат.

102. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(-1; \frac{1}{4}\right)$.

103. Составить уравнения прямых, проходящих через пары точек: 1) (1; 3) и (2; 4); 2) (— 1; — 4) и (0; 5); 3) (1; 3) и (1; — 7); 4) (2; — 5) и (4; — 5); 5) (0; 4) и (2; 0).

104. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку (— 1; — 8).

105. Построить прямую, проходящую через начало координат и через точку (— 2; 3). Написать ее уравнение.

106. Дан треугольник с вершинами $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(5; 0)$. Написать уравнения сторон треугольника.

107. Проверить, лежат ли три точки в каждом из следующих случаев на одной прямой: 1) (2; — 3), (4; 7), (4; 17); 2) (2; — 3), (4; 7), (8; 15); 3) (— 4; — 1), (5; 2), (8; 3); 4) (1; 2), (2; 4), (7; 8).

108. Прямая пересекает ось Oy в некоторой точке C и проходит через точки $A(2; 5)$ и $B(-7; -3)$. Найти координаты точки C.

§ 6. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Нормальное уравнение прямой. Общее уравнение прямой. Точка пересечения двух прямых. Расстояние от точки до прямой

1. Угол φ, отсчитанный против часовой стрелки от прямой с угловым коэффициентом k_1 до прямой с угловым коэффициентом k_2, определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (k_1 \cdot k_2 \neq -1). \tag{1}$$

2. Условие параллельности двух прямых: $k_2 = k_1$.

3. Условие перпендикулярности двух прямых: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ или $k_1 k_2 = -1$.

4. Нормальное уравнение прямой имеет вид

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0, \tag{2}$$

где p — длина перпендикуляра (нормали), опущенного из начала координат на прямую, а α — угол между положительным направлением оси Ox и перпендикуляром OP (рис. 17).

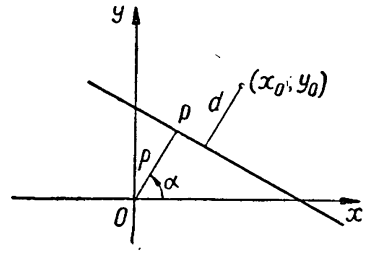


Рис. 17

Чтобы привести общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3)$$

к нормальному виду, нужно все члены его умножить на нормирующий множитель $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (знак выбирается противоположный знаку $C \neq 0$. При $C = 0$ можно брать любой знак).

5. Расстояние d от данной точки $(x_0; y_0)$ до прямой (2) определяется по формуле

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \qquad (4)$$

и до прямой (3) по формуле

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \qquad (4')$$

Если в формулах (4) и (4') отбросить знак абсолютной величины ($p \neq 0$ и $C \neq 0$), то при вычислениях будем получать число δ со знаком плюс в том случае, когда начало координат и данная точка находятся по разные стороны от прямой (см. рис. 17), и со знаком минус, когда они находятся по одну сторону от прямой. В первом случае $d = \delta$, во втором $d = -\delta$. В обоих случаях $d = |\delta|$.

6. Чтобы найти точку пересечения двух прямых, угловые коэффициенты которых $k_1 \neq k_2$, надо решить систему уравнений, составленную из уравнений этих прямых.

109. Найти угол между двумя прямыми:

1) $y = -2x$, $y = 3x + 5$;
2) $4x + 2y - 5 = 0$, $6x + 3y + 1 = 0$;
3) $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$, $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$;
4) $2x + 3y - 1 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$;
5) $3x + 4y - 5 = 0$, $5x - 2y + 7 = 0$;
6) $y = 2x + 3$, $y - 4 = 0$;
7) $2x - 4y + 7 = 0$, $x - 5 = 0$.

Решение.

1) $k_1 = -2$, $k_2 = 3$, следовательно, по формуле (1) получим (рис. 18, *а*):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{3 - (-2)}{1 + (-2)\,3} = -1, \quad \varphi = 135°;$$

2) $k_1 = -2$, $k_2 = -2$, следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2 - (-2)}{1 + (-2)\cdot(-2)} = 0, \quad \varphi = 0°,$$

т. е. данные прямые параллельны;

3) $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = -\sqrt{3}$, следовательно, по формуле (1) получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+(-\sqrt{3})\sqrt{3}} = \sqrt{3},\ \varphi = 60°;$$

4) $k_1 = -\frac{2}{3}$; $k_2 = \frac{3}{2}$.

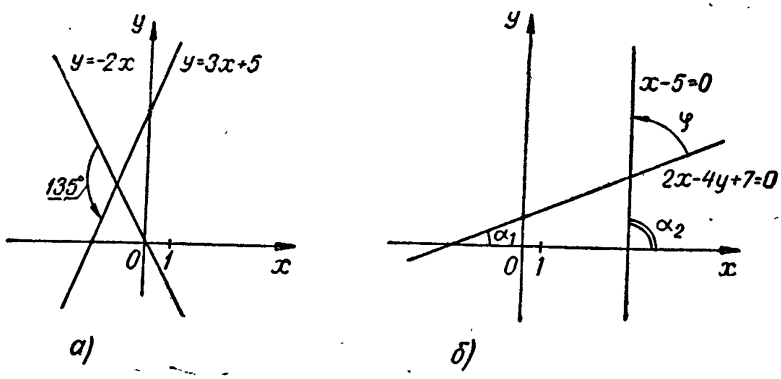


Рис. 18

Нетрудно видеть, что $k_1 k_2 = -1$, следовательно, эти две прямые образуют угол 90°, т. е. они взаимно перпендикулярны;

5) оба уравнения решим относительно y. Получим уравнения прямых с угловыми коэффициентами

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4},\ y = \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Отсюда видно, что $k_1 = -\frac{3}{4}$, $k_2 = \frac{5}{2}$, следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{5}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}} = -\frac{26}{7} \approx -3{,}714,\ \varphi \approx 105°4';$$

6) $k_1 = 2$, $k_2 = 0$, следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0-2}{1+2\cdot 0} = -2,\ \varphi \approx 116°34';$$

7) $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{2}$, отсюда $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ (рис. 18,*б*).

Прямая $x - 5 = 0$ параллельна оси Oy или перпендикулярна к оси Ox, следовательно, $\alpha_2 = 90°$. Таким образом,

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 = 90° - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 90° - 26°34' = 63°26'.$$

110. Написать нормальное уравнение прямой, если длина нормали $p = 3$, а угол α, образованный ею с положительным направлением оси Ox, равен 45°; 315°.

Решение. Воспользуемся формулой (2). По условию:

1) $p = 3$, $\alpha = 45°$, следовательно,

$$x \cdot \cos 45° + y \cdot \sin 45° - 3 = 0$$

или

$$\frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y - 3 = 0;$$

2) $p = 3$, $\alpha = 315°$, следовательно,

$$x \cdot \cos 315° + y \cdot \sin 315° - 3 = 0$$

или

$$\frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y - 3 = 0.$$

111. Привести к нормальному виду уравнения прямых:

1) $2x - 3y - 10 = 0$;

2) $3x + 4y = 0$.

Решение. В первом уравнении $C = -10$, следовательно, нормирующий множитель M надо взять со знаком плюс:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Умножив все члены уравнения на этот множитель, получим уравнение прямой нормального вида:

$$\frac{2}{\sqrt{13}} x - \frac{3}{\sqrt{13}} y - \frac{10}{\sqrt{13}} = 0.$$

Во втором уравнении $C = 0$, следовательно, нормирующий множитель можно взять с любым знаком, например со знаком плюс:

$$M = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

Умножая все члены данного уравнения на этот множитель, получим уравнение нормального вида:

$$\frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y = 0.$$

112. Найти расстояние точек: 1) $A(-2; -3)$ от прямой $8x + 15y + 27 = 0$; 2) $B(2; -5)$ от прямой $6x + 8y - 7 = 0$.

Решение. 1) Воспользовавшись формулой (4′), получим

$$d = \left| \frac{8(-2) + 15(-3) + 27}{-\sqrt{64 + 225}} \right| = \left| \frac{-34}{-17} \right| = 2.$$

Начало координат и точка A находятся по разные стороны от прямой, в соответствии с этим мы получим $\delta = 2 > 0$.

$$2)\ d = \left| \frac{6 \cdot 2 + 8(-5) - 7}{\sqrt{36 + 64}} \right| = \left| -3{,}5 \right| = 3{,}5.$$

Начало координат и точка B находятся по одну сторону от прямой, в соответствии с этим $\delta = -3{,}5 < 0$.

113. Дан треугольник с вершинами $A(4; 6)$, $B(-3; 0)$, $C(2; -3)$. Найти углы треугольника, уравнения биссектрисы AD, высоты CE и точку их пересечения.

Решение. Угловые коэффициенты прямых AB, BC, AC (рис. 19) найдем по формуле (6) § 5:

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-6}{-3-4}=\frac{6}{7};\ k_{BC}=\frac{-3-0}{2-(-3)}=-\frac{3}{5};\ k_{AC}=\frac{-3-6}{2-4}=\frac{9}{2}.$$

Теперь найдем углы треугольника, воспользовавшись формулой (1):

$$\operatorname{tg}A=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}\cdot k_{AB}}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{6}{7}}{1+\frac{9}{2}\cdot\frac{6}{7}}=\frac{3}{4},\ A=\operatorname{arctg}0{,}75\approx 36°52';$$

$$\operatorname{tg}B=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{6}{7}}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)\frac{6}{7}}=3,\ B=\operatorname{arctg}3\approx 71°34';$$

$$\operatorname{tg}C=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{9}{2}}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)\frac{9}{2}}=3,\ C=\operatorname{arctg}3,$$

следовательно, $B=C\approx 71°34'$, т. е. $\triangle ABC$ равнобедренный.

Для нахождения уравнения биссектрисы угла A надо сначала написать уравнения сторон AB и AC данного треугольника.

Уравнение AB:

$$\frac{y-6}{0-6}=\frac{x-4}{-3-4}$$

или

$$6x-7y+18=0.$$

Уравнение AC:

$$\frac{y-6}{-3-6}=\frac{x-4}{2-4}$$

или

$$9x-2y-24=0.$$

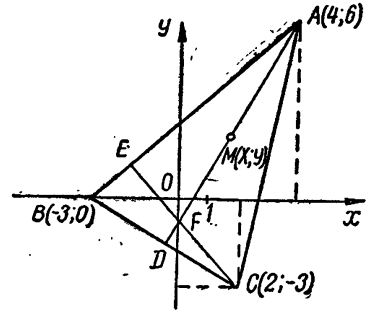


Рис. 19

Пусть точка $M(X; Y)$ лежит на биссектрисе AD (X и Y — текущие координаты биссектрисы), тогда она будет одинаково удалена от сторон AB и AC угла A.

Расстояние d_1 точки $M(X; Y)$ от стороны AB с учетом того, что начало координат и точка M находятся по одну сторону от прямой AB ($\delta_1 < 0$), можно записать так:

$$d_1 = -\delta_1 = -\frac{6X - 7Y + 18}{-\sqrt{36 + 49}}.$$

Аналогично расстояние d_2 точки M от прямой AC:

$$d_2 = -\delta_2 = -\frac{9X - 2Y - 24}{\sqrt{81 + 4}}.$$

Следовательно, уравнение биссектрисы AD:

$$d_1 = d_2, \text{ т. е. } -\frac{6X - 7Y + 18}{-\sqrt{85}} = -\frac{9X - 2Y - 24}{\sqrt{85}}$$

или после упрощений:

$$5X - 3Y - 2 = 0.$$

Теперь напишем уравнение CE. По условию прямая CE перпендикулярна к прямой AB, следовательно, $k_{CE} = -\frac{1}{k_{AB}}$, т. е. $k_{CE} = -\frac{7}{6}$.

Учитывая также, что прямая CE проходит через точку $C(2; -3)$, напишем искомое уравнение прямой CE:

$$y - (-3) = -\frac{7}{6}(x - 2) \text{ или } 7x + 6y + 4 = 0.$$

Найдем точку пересечения F прямых AD и CE, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x + 6y + 4 = 0 \mid 1 \\ 5x - 3y - 2 = 0 \mid 2 \end{cases}, \quad \begin{array}{r} 7x + 6y + 4 = 0 \\ +\ 10x - 6y - 4 = 0, \\ \hline 17x = 0 \end{array}$$

т. е. $x = 0$, следовательно, $y = -\frac{2}{3}$.

Итак, искомая точка пересечения указанных прямых $F\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

114. Построить прямые, заданные следующими уравнениями:

1) $3x + 2y + 1 = 0$; 4) $-x + 2y = 0$; 7) $y - 2 = 0$;
2) $x - 4y + 2 = 0$; 5) $x + 3 = 0$; 8) $2y + 3 = 0$;
3) $2x + 3y = 0$; 6) $4x - 3 = 0$; 9) $x - y = 0$;
10) $x + y = 0$.

115. Проходит ли прямая $2x + 3y + 5 = 0$ через точки $A(-4; 1)$, $B(4; -1)$, $C(5; -5)$, $D(7; 9)$?

116. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

1) $2x - 3y + 1 = 0$; 2) $7x + 6y = 5$; 3) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$;
4) $y = 2$; 5) $2x + 5y = 0$; 6) $2x - 5y = 0$.

117. Уравнение прямых: 1) $2x-7y+14=0$, 2) $x-8y-12=0$, 3) $5x-y+3=0$, 4) $9x+10y-30=0$ привести к виду уравнения в отрезках.

118. Найти точки, в которых прямая $6x-4y-3=0$ пересекает оси координат.

119. Найти угловые коэффициенты прямых:

1) $x-y-5=0$; 2) $6x-3y+7=0$; 3) $3x+2y-1=0$;
4) $0{,}7x+2y-8=0$; 5) $2x+3y=0$; 6) $0{,}36x+0{,}18y+0{,}1=0$.

120. Доказать, что следующие пары прямых параллельны:

1) $6x+y-3=0$, $12x+2y+7=0$;
2) $x+2y-1=0$, $2x+4y+3=0$;
3) $x+3=0$, $2x+5=0$;
4) $3y-4=0$, $4y+9=0$.

121. Доказать, что пары прямых, заданные уравнениями:

1) $x-2y+3=0$, $-3x+6y-9=0$;
2) $x=2y+1$, $4y-2x+2=0$;
3) $x-3y=0$, $2x-6y=0$,

совпадают.

122. Доказать, что следующие пары прямых взаимно перпендикулярны:

1) $x-2y+5=0$, $2x+y-7=0$;
2) $3x+5y-9=0$, $10x-6y+1=0$;
3) $x+y=0$, $x-y=0$;
4) $x+5=0$, $y+1=0$.

123. Доказать, что следующие пары прямых пересекаются, и найти точку их пересечения:

1) $x+y-3=0$, $2x+3y-8=0$;
2) $x+y+2=0$, $2x+5y-3=0$;
3) $x+1=0$, $x+2y=0$;
4) $2x+y-1=0$, $y+3=0$;
5) $x+2=0$, $y-1=0$.

124. Среди прямых $2x-3y+2=0$, $4x-6y+3=0$, $4x+6y+1=0$, $3x+2y-5=0$ указать параллельные и перпендикулярные.

125. В точках пересечения прямой $x-3y-5=0$ с осями координат восставлены перпендикуляры к этой прямой. Найти их уравнения.

126. Найти угол между двумя прямыми:

1) $y = \frac{1}{2}x + 3$ и $y = 3x - 5$;
2) $y = 3x + 1$ и $y = 3x + 2$;
3) $y = 2x - 1$ и $y = -\frac{1}{2}x + 1$;
4) $2x + 3y - 1 = 0$ и $4x + 6y + 3 = 0$;
5) $2x - y + 5 = 0$ и $x + 3y - 2 = 0$;
6) $4x + 3y - 1 = 0$ и $x + 2y = 0$;
7) $x + 4y + 3 = 0$ и $5y + 2 = 0$;
8) $y = 2x + 5$ и $x = 3$.

127. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с прямой $y = 2x + 3$ угол 45°.

128. Найти вершины и внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 3y - 2 = 0$, $2x + y + 5 = 0$, $3y + 4 = 0$.

129. Найти угол между прямой $2x - 3y + 6 = 0$ и прямой, проходящей через точки (4; −5) и (−3; 2).

130. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку $A(5; -1)$ параллельно прямой, соединяющей точки $B(0; 3)$ и $C(2; 0)$.

131. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и перпендикулярной к прямой $y = 0{,}5x + 3$.

132. Найти уравнение перпендикуляра, восставленного в середине отрезка, соединяющего точки (−5; −1) и (−3; 4).

133. Найти прямую, проходящую через точку (2; −3) и параллельную прямой $3x - 2y + 2 = 0$.

134. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$ и через точку пересечения прямых $3x - 5y - 11 = 0$ и $4x + y - 7 = 0$.

135. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x - 3y + 2 = 0$, $5x + 6y - 4 = 0$ и параллельной прямой $4x + y - 7 = 0$.

136. Зная уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $y = 5$ и $x + y + 3 = 0$, написать уравнение третьей стороны при условии, что она проходит через начало координат.

137. Построить прямую, если длина нормали $p = 5$, а угол α, образованный ею с положительным направлением оси Ox, равен: 1) 30°; 2) 150°; 3) 210°; 4) 330°. Написать уравнения этих прямых.

138. Привести к нормальному виду уравнения прямых:

1) $2x - 3y - 5 = 0$; 2) $x + y + 1 = 0$; 3) $y = 2x + 5$;
4) $y = -3x + 2$; 5) $3x - 4y - 15 = 0$.

139. Даны уравнения прямых:

1) $2x-3y+5=0$; 2) $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y-1=0$;

3) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$; 4) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-1=0$;

5) $x-5=0$; 6) $y-7=0$.

Укажите, какие из этих прямых представлены нормальными уравнениями.

140. На каком расстоянии от начала координат находятся прямые:

1) $2x+3y-4=0$; 2) $x-2y+3=0$;
3) $2x+y=0$; 4) $y=x-2$;
5) $y=-3$; 6) $x+5=0$?

141. Найти расстояние от точки $A\left(2;\ -\frac{3}{2}\right)$ до прямой $x+2y-4=0$.

142. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x+3y-8=0$ и $2x+3y-10=0$.

143. Показать, что прямые $2x-3y=6$ и $4x-6y=25$ параллельны, и найти расстояние между ними.

144. Найти k из условия, что прямая $y=kx+3$ удалена от начала координат на расстояние $d=\sqrt{7}$.

145. Найти расстояние точек: 1) $A(2;\ 3)$; 2) $B(0;\ -5)$; 3) $C(-2;\ -3)$; 4) $D(1;\ 5)$ от прямой $3x+4y-3=0$. Построить точки и прямую.

146. Найти расстояние от точек: 1) (2; 1); 2) (—3; 2); 3) (5; — 1); 4) (0; —3); 5) (0; 0) до прямой $2x+3y=0$.

147. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами $A(2;\ 3)$, $B(-5;\ 1)$, $C(0;\ -2)$.

148. Как расположены точки $A(2;\ -1)$, $B(-3;\ 1)$ и начало координат относительно прямой $x+4y-5=0$?

149. Как расположены точки $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(-2;\ -2)$ относительно прямой $x+2y=0$?

150. Дан треугольник с вершинами $A(0;\ 5)$, $B(3;\ 1)$, $C(-6;\ -3)$. Найти уравнение медианы CE, биссектрисы AD и точку F их пересечения. Сделать чертеж.

151. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $4x-6y+7=0$ и $3x+2y-2=0$. Проверить, что эти биссектрисы взаимно перпендикулярны.

152. Найти уравнение геометрического места точек, удаленных от прямой $3x-4y+10=0$ на расстояние, равное 2.

§ 7. Смешанные задачи на прямую

153. Отрезок $\overline{AB}$ делится в точке $C(-3;\ 0)$ в отношении $\lambda = \frac{2}{3}$. Найти длину $\overline{AB}$, если дана точка $A(-5;\ -4)$.

154. Дано уравнение первой степени:

$$\frac{3x-2}{4} - \frac{2y-1}{2} = 1.$$

Найти для соответствующей прямой ее: 1) общее уравнение; 2) уравнение с угловым коэффициентом; 3) уравнение в отрезках; 4) нормальное уравнение.

155. Прямая проходит через точки $A(-1;\ 3)$ и $B(4;\ 5)$. Найти длину отрезка, отсекаемого ею на оси абсцисс.

156. Определить свободный член уравнения прямой $2x - 5y + c = 0$, если эта прямая проходит через точку пересечения прямых $x + 2y = 0$ и $x - 3y + 2 = 0$.

157. Найти уравнение перпендикуляра, восставленного к прямой $x - y + 1 = 0$ в точке ее пересечения с осью Ox.

158. Найти уравнения двух перпендикуляров к прямой $6x - 3y - 7 = 0$, восставленных в точках пересечения ее с осями координат.

159. При каком значении параметра a уравнения $8ax - 3y + 2 = 0$ и $4x - 7y - 1 = 0$ изображают: 1) параллельные прямые; 2) взаимно перпендикулярные прямые?

160. Определить, при каком значении b прямая $by + 5 = 0$ пройдет через точку пересечения прямой $x + 2y - 3 = 0$ с осью Oy.

161. На прямой $2x - y + 4 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(4;\ 1)$ и $B(-2;\ -3)$.

162. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $x + y - 2 = 0$ и $3x + 2y - 5 = 0$ перпендикулярно к прямой $3x + 4y - 12 = 0$.

163. База A берет за перевоз тонны груза k_1 руб. База B — k_2 руб. и дополнительно b руб. за погрузку 1 m. Когда выгоднее пользоваться услугами базы A и когда базы B, если $k_1 > k_2$?

164. Какая должна быть зависимость между коэффициентами a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ образовала с осью Oy углы: 1) 30°; 2) 60°?

165. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки (— 1; 2) на прямую $3x - 5y - 21 = 0$.

166. При каком значении коэффициента m прямая $y = mx + 3$ проходит через точку пересечения прямых $2x - y + 1 = 0$ и $y = x + 5$?

167. Найти острый угол между прямыми $x+y-5=0$ и $x+4y-8=0$.

168. Определить угол между прямой $2x-3y+5=0$ и прямой $x=0$.

169. Найти угол между прямой $y=0$ и прямой $x=0$.

170. Заданы уравнения диагоналей квадрата $4x-5y+3=0$, $5x+4y-27=0$ и координаты одной из его вершин $A(-1; 8)$. Найти уравнения всех сторон квадрата.

171. Написать уравнения сторон квадрата, две противоположные вершины которого есть точки $A(1; 3)$ и $C(6; -2)$.

172. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$ $A(1; 4)$, $B(3; 9)$ и $C(8; 9)$. Найти координаты вершины D и написать уравнение диагонали BD.

173. Даны координаты двух смежных вершин квадрата $A(1; 4)$ и $B(4; 0)$. Найти уравнения всех его сторон, если известно, что вершина квадрата C находится на оси ординат.

174. По координатам трех вершин параллелограмма $A(7; 2)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 5)$ найти координаты четвертой вершины D, если AB является одной из диагоналей параллелограмма.

175. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x+2y=4$, $x+2y=10$ и уравнение одной из его диагоналей $y=x+2$.

176. Дана трапеция с вершинами $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$, $D(3; 1)$. Найти уравнение средней линии трапеции и острый угол, заключенный между диагоналями.

177. Дан треугольник с вершинами $A(7; 0)$, $B(3; 4)$, $C(2; -3)$. Найти уравнения стороны AB, высоты CD, биссектрисы BE, медианы CF, их длины и угол A. Сделать чертеж.

178. Дан треугольник с вершинами $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$, $C(3; -5)$. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

179. Даны уравнения сторон треугольника $y=x+2$, $y=-\frac{1}{2}x+1$ и точка $D(4; 2)$ пересечения его медиан. Написать уравнение третьей стороны.

180. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $(1; 3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$, $y-1=0$.

181. Даны середины сторон треугольника $(2; 1)$, $(4; 3)$ и $(-2; 5)$. Найти уравнения сторон этого треугольника.

182. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(2; 5)$, $B(5; -1)$ и $C(8; 3)$ перпендикулярно к прямой $x+y+4=0$.

§ 8. Кривые второго порядка

Классификация линий

Уравнение линии на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат (см. § 4) имеет такой вид:

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Если уравнение (1) алгебраическое (т. е. над переменными x и y производится конечное число алгебраических действий: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с целым показателем и извлечение корня), то линия, изображаемая этим уравнением, называется *алгебраической*. Неалгебраическая линия называется *трансцендентной*. Например, линия, изображаемая уравнением $y^2 + x^2 - 2ax = 0$, алгебраическая, а линии, изображаемые уравнениями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $y = \lg x$, трансцендентные.

Алгебраическое уравнение линии можно привести к целому рациональному виду (избавиться от иррациональностей, от дробей и все члены уравнения перенести в одну сторону), т. е. представить его в виде многочлена, членами которого будут одночлены вида Ax^py^q, где A — числовой коэффициент, p и q — целые неотрицательные числа.*

Линия, которая определяется алгебраическим уравнением n-й степени, называется алгебраической линией n-го порядка. Например, уравнение $y = \sqrt[3]{x}$ легко приводится к целому рациональному виду $y^3 - x = 0$, оно представляет алгебраическую кривую третьего порядка. Уравнение $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ легко привести к уравнению $3xy - 2x + 2y + 1 = 0$; это уравнение кривой второго порядка. Линия, изображаемая уравнением $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, т. е. уравнением $x^2y + y - 1 = 0$, есть кривая третьего порядка. Уравнение первой степени $ax + by + c = 0$ есть, как нам уже известно, уравнение прямой, следовательно, прямая линия первого порядка. Общее уравнение второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (2)$$

где по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

183. Алгебраические линии заданы следующими уравнениями:

1) $y = \dfrac{2}{x}$; 2) $y^2 - 3xy^2 + 5x - 1 = 0$; 3) $y = \sqrt{x-1}$;

4) $\dfrac{y}{x} = 5$; 5) $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 1$; 6) $y\sqrt{x} + 3x - 1 = 0$.

Определить порядок каждой из этих линий.

* Степенью одночлена Ax^py^q называется сумма $p + q$ показателей степеней переменных x и y. Степенью многочлена называется наивысшая из степеней слагаемых одночленов.

Окружность

Пусть точка $C(a; b)$ — центр окружности, а ее радиус равен R. Составим уравнение этой окружности (рис. 20). По определению окружности расстояние любой точки $M(x; y)$, лежащей на окружности, от ее центра $C(a; b)$ равно длине радиуса R, т. е. $CM = R$

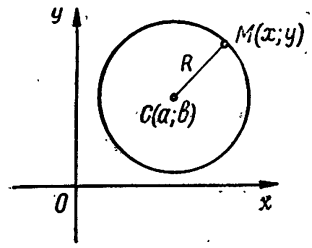


Рис. 20

или $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$,

отсюда

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется *нормальным* уравнением окружности.

Если центр окружности совпадает с началом координат, т. е. $a = b = 0$, то уравнение (3) принимает вид

$$x^2+y^2 = R^2. \qquad (3')$$

Это уравнение называется *каноническим* (простейшим) уравнением окружности.

Легко показать, что если в уравнении (2) $A = C \neq 0$ и $B = 0$, то уравнение

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F = 0 \qquad (2')$$

в зависимости от коэффициентов A, D, E, F будет либо уравнением окружности, либо уравнением геометрического места точек, состоящего из одной точки.

Может случиться, что вовсе не существует точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (2'). В этом случае мы будем говорить, что уравнение (2') определяет мнимое геометрическое место точек.

184. Написать уравнения окружностей: 1) с центром в точке $C(-2; 3)$ и радиусом $R = 5$; 2) с центром в точке $C\left(\frac{1}{3}; -1\right)$ и радиусом $R = \frac{1}{2}$.

Решение. 1) По условию $a = -2$, $b = 3$, $R = 5$, следовательно, по формуле (3) получим искомое уравнение окружности

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = 25,$$

или

$$x^2+4x+4+y^2-6y+9 = 25,$$

или

$$x^2+y^2+4x-6y-12 = 0.$$

2) Здесь $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$, $R=\frac{1}{2}$, следовательно, уравнение окружности будет иметь вид:

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$$

или $$36x^2+36y^2-24x+72y+31=0.$$

185. Привести к нормальному виду уравнения окружностей:
1) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$;
2) $4x^2+4y^2-8x+4y-11=0$.

Решение. Приведем первое уравнение к нормальному виду следующим образом:

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)-4-9-3=0,$$

отсюда

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16,$$

следовательно, центр окружности находится в точке $C(2;-3)$, а радиус $R=4$.

Приведем к нормальному виду второе уравнение. Разделив все члены уравнения на коэффициент при x^2, равный 4, получим

$$x^2+y^2-2x+y-\frac{11}{4}=0.$$

Теперь в левой части уравнения прибавим и вычтем квадраты половин коэффициентов при x и y и запишем так:

$$(x^2-2x+1)+\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)-1-\frac{1}{4}-\frac{11}{4}=0,$$

отсюда

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4.$$

Следовательно, координаты центра окружности $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, т. е. центр окружности находится в точке $C\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, а радиус $R=2$.

186. Написать уравнение окружности радиуса $R=4$ с центром в начале координат. Определить положение следующих точек: 1) $(-1;3)$; 2) $(0;-3)$; 3) $(4;0)$; 4) $(3;\sqrt{7})$; 5) $(2;-5)$; 6) $(1;-4)$ относительно этой окружности.

187. Написать уравнение окружности, если 1) центр ее находится в точке $C(3;-5)$, а радиус $R=4$; 2) центр находится в точке $C(0;2)$, а радиус $R=3$; 3) центр лежит в точке $C(-3;0)$, а радиус равен семи единицам длины; 4) центр лежит в точке $C(1;3)$ и окружность проходит через точку $M(-4;5)$; 5) центр находится в точке $C(0;-3)$, а радиус $R=0{,}7$.

188. Привести к нормальному виду уравнения окружностей:

1) $x^2+y^2-6x=0$; 2) $x^2+y^2+2x+4y=0$;
3) $x^2+y^2-x-5y+3=0$; 4) $x^2+y^2+8x-9y+2=0$;
5) $2x^2+2y^2-2x+7y-1=0$.

189. Найти центры и радиусы окружностей:

1) $x^2+y^2-4x+3=0$; 2) $x^2+y^2+5y-2=0$;
3) $x^2+y^2+6x=0$; 4) $x^2+y^2-4y=0$;
5) $x^2+y^2-3x+6y-1=0$; 6) $3x^2+3y^2+6x-4y-1=0$.

190. Исследовать, какие линии изображаются уравнениями:

1) $x^2+y^2=0$; 2) $x^2+y^2+1=0$;
3) $x^2+y^2-4x+2y+5=0$; 4) $x^2+y^2+2x+4y-4=0$;
5) $x^2+y^2-2x+2y+6=0$; 6) $x^2+y^2-2y=0$;
7) $x^2+y^2+14x=0$; 8) $x^2-y^2=0$.

191. Найти уравнение окружности, если известно, что концы одного из диаметров ее имеют координаты $(2;-4)$ и $(-6;2)$. Лежат ли на этой окружности точки $A(2;-1)$, $B(-3;4)$, $C(1;2)$, $D(2;1)$, $E(0;3)$, $F(-2;4)$?

192. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $(-2;3)$ и касающейся прямой $x-3y+2=0$.

193. Составить уравнение окружности, зная, что она проходит через точки $A(0;1)$, $B(2;0)$, $C(-2;0)$.

194. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются точки $(0;1)$, $(-2;0)$ и $(0;-1)$.

195. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $(-1;-2)$ и проходящей через точку $(3;4)$.

196. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox в точке $(6;0)$ и проходящей через точку $(9;9)$.

197. Найти уравнение прямой, которая проходит через центр окружности $x^2+y^2-4x+3y+6=0$ параллельно прямой $2x+y-4=0$.

198. Составить уравнение окружности, зная, что радиус $R=1$ и что она проходит через точки $A(0;-1)$ и $B(1;0)$. Построить эту окружность.

199. Найти уравнение окружности, диаметром которой является отрезок прямой $3x-4y+12=0$, содержащийся между осями координат.

200. Определить расстояние между центрами окружностей:

1) $x^2+y^2-6x-8y-3=0$ и $x^2+y^2+4x-2y-1=0$;
2) $x^2+y^2-1=0$ и $x^2+y^2+2x=0$.

201. Найти точки пересечения каждой из окружностей:

1) $x^2 + y^2 - 4y = 0$; 2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$;

3) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 2$

с осями координат.

202. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 5$ с прямыми:

1) $3x - y + 1 = 0$; 2) $x - y + 4 = 0$.

203. Найти длину хорды окружности $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$, если известно уравнение хорды $y = 1$.

204. Найти уравнение окружности, касающейся оси Oy в начале координат и пересекающей ось Ox в точке (5; 0).

205. Составить уравнение линии центров окружностей

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \text{ и } x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0.$$

206. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и пересекающей ось Oy в точке (0; -7).

207. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в точке (-5; 0) и имеющей радиус $r = 3$.

208. Найти точки пересечения оси Ox с окружностью, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точки (1; -4) и (3; 2).

209. Найти точки пересечения оси Oy с окружностью, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точки (-1; 1) и (-2; -3).

210. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(1; 3)$, чем к точке $B(1; -1)$. Построить траекторию движения.

211. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку (4; -2).

212. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат, если ее центр лежит в точке с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

213. Окружность касается прямых $x - 2 = 0$ и $x = 6$, ее центр лежит на прямой $3x - y - 6 = 0$. Найти уравнение этой окружности.

Преобразование координат (параллельный перенос осей)

Если перенести начало координат в точку $O_1(\alpha; \beta)$ и не менять направление осей (рис. 21), то связь между старыми координатами x, y и новыми X, Y одной и той же точки выражается формулами:

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$$

или

$$X = x - \alpha, \quad Y = y - \beta. \tag{4}$$

214. Путем преобразования координат параллельным переносом осей упростить уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 68 = 0,$$

принимая за новое начало центр окружности.

Решение. Найдем центр окружности, т. е. найдем начало новой системы координат. Данное уравнение окружности приведем к нормальному виду

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 81.$$

Отсюда видно, что центр окружности лежит в точке $C(2; -3)$, т. е. за новое начало принимаем точку O_1 с координатами $\alpha = 2$, $\beta = -3$. Воспользовавшись формулами (4), найдем:

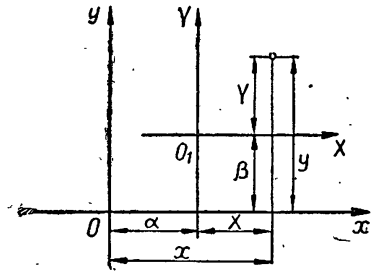


Рис. 21

$$x = X + 2, \quad y = Y - 3 \quad \text{или} \quad X = x - 2, \quad Y = y + 3.$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение окружности или в нормальное, соответственно получим

$$X^2 + Y^2 = 81.$$

215. Дана точка $M(2; -1)$ в некоторой системе координат. Чему будут равны координаты этой точки, если, сохраняя направление осей, переносить начало координат в точку: 1) (2; 3); 2) (2; −3); 3) (−2; 3); 4) (−2; −3)?

216. При параллельном переносе осей координат точка (−3; 4) получила новые координаты (5; 6). Найти координаты начала новой системы координат относительно прежней.

217. Как изменится уравнение прямой $2x - 4y + 3 = 0$ при параллельном переносе осей координат, если за начало новой системы координат принять точку (0; 1)?

218. Преобразовать уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$ путем параллельного переноса осей координат. За начало новой системы координат взять точку (−3; 5).

Уравнение параболы с осью, параллельной одной из осей координат

Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых равноудалена от данной точки F (фокуса) и данной прямой DE (директрисы).

Составим уравнение параболы. За ось абсцисс примем перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису DE, за начало координат — середину O отрезка от точки F до прямой DE, длину которого обозначим через p (рис. 22). По определению расстояние от любой точки $M(x; y)$ параболы до точки F и до прямой DE одинаково, т. е. $FM = MC$ или

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2},$$

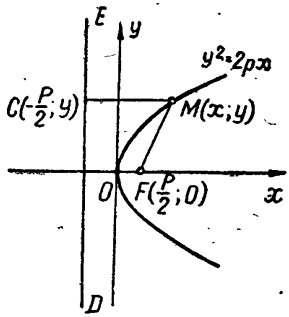


Рис. 22

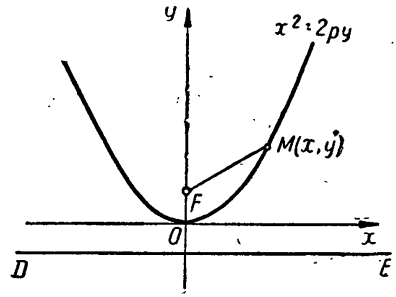


Рис. 23

отсюда

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

или

$$y^2=2px. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется *каноническим уравнением параболы*. Величину $p>0$ называют *параметром параболы*, точку пересечения параболы с ее осью Ox *вершиной параболы*. Уравнение директрисы параболы имеет вид $x=-\frac{p}{2}$. Расстояние r от любой точки $M(x; y)$ параболы (5) до фокуса определяется по формуле $r=x+\frac{p}{2}$.

Уравнение (5) можно записать и так:

$$x=ay^2. \qquad (6)$$

Уравнение

$$x^2=2py, \qquad (7)$$

которое получается из равенства (5) путем изменения ролей координат, также есть уравнение параболы с вершиной в начале координат и осью симметрии, совпадающей с осью Oy. Уравнение директрисы $y=-\frac{p}{2}$. Расстояние от любой точки $M(x; y)$ параболы (7) до фокуса F определяется по формуле $r=y+\frac{p}{2}$ (рис. 23).

Уравнение (7) можно записать и так:

$$y = ax^2. \tag{8}$$

Заметим, что если в уравнениях (6) и (8) $a > 0$, то ветви параболы направлены соответственно вправо от начала координат и вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы (6) направлены влево от начала координат, а параболы (8)—вниз (рис. 24, *а*, *б*).

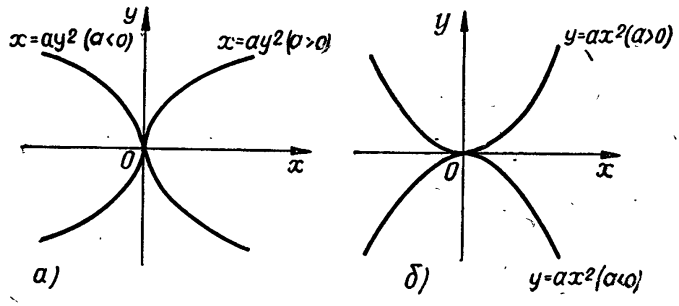


Рис. 24

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \tag{9}$$

преобразуем. Выделив из квадратного трехчлена полный квадрат, получим

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

отсюда

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

или

$$y - \beta = a(x - \alpha)^2,$$

где $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$, $\alpha = -\frac{b}{2a}$,

или

$$Y = aX^2,$$

где $X = x - \alpha$ и $Y = y - \beta$.

Следовательно, уравнение (9) определяет параболу, вершина которой находится в точке $O_1(\alpha; \beta)$, а ось симметрии ее параллельна оси Oy (рис. 25).

Аналогично легко показать, что уравнение

$$x = ay^2 + by + c \tag{10}$$

также определяет параболу с осью, параллельной оси Ox.

219. Определить координаты фокуса параболы $y = \frac{1}{6}x^2$ и написать уравнение ее директрисы.

Р е ш е н и е. Данное уравнение параболы напишем в канонической форме $x^2 = 6y$. Сравнивая это уравнение с уравнением (7), получим $2p = 6$, $p = 3$. Следовательно, фокус параболы находится в точке F (0; 1,5) и уравнение директрисы DE $y = -1{,}5$.

220. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0; -3)$ и от прямой $y + 5 = 0$. Построить эту кривую.

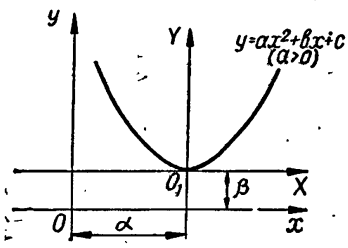


Рис. 25

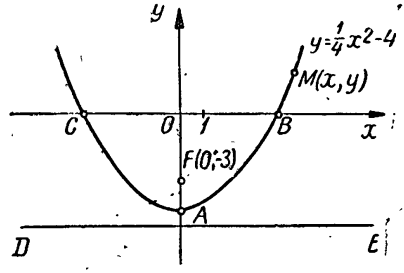


Рис. 26

Р е ш е н и е. Обозначим произвольную точку искомой кривой через $M(x; y)$, ее расстояние d_1 от точки F равно расстоянию d_2 до данной прямой, т. е. $d_1 = d_2$, или

$$\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = y + 5,$$

отсюда

$$x^2 + (y+3)^2 = (y+5)^2$$

или

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 4.$$

Мы получили уравнение параболы, ось симметрии которой совпадает с осью Oy. Ветви параболы направлены в сторону положительного направления оси Oy, так как коэффициент $a = \frac{1}{4} > 0$. Найдем вершину параболы и точки ее пересечения с осью Ox.

Если $x = 0$, то $y = -4$, т. е. вершина параболы лежит в точке $A(0; -4)$. Если $y = 0$, то $\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0$ или $x^2 - 16 = 0$, отсюда $x_1 = 4$, $x_2 = -4$. Таким образом, точки пересечения параболы с осью Ox: $B(4; 0)$, $C(-4; 0)$. Теперь легко построить искомую параболу (рис. 26).

221. Найти координаты вершины параболы, заданной уравнением $x = 2y^2 + 4y - 5$. Написать уравнение оси симметрии и построить параболу.

Р е ш е н и е. Найдем координаты вершины параболы:

$$x = 2\left(y^2 + 2y - \frac{5}{2}\right) = 2\left[(y+1)^2 - 1 - \frac{5}{2}\right] = 2(y+1)^2 - 7,$$

отсюда $x + 7 = 2(y+1)^2$ или $X = 2Y^2$, где $X = x + 7$ и $Y = y + 1$, т. е. $\alpha = -7$, $\beta = -1$ (см. формулы (4)). Следовательно, вершина параболы лежит в точке $O_1(-7; -1)$. Уравнение оси параболы $y = -1$.

Параболу $X = 2Y^2$ построим в новой системе координат XO_1Y (рис. 27). Заметим, что при построении полезно найти точки пересечения параболы со старыми осями координат. Найдем их. Пусть $x = 0$, тогда $2y^2 + 4y - 5 = 0$. Решая это уравнение, получаем:

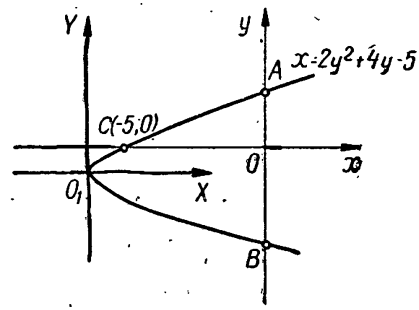


Рис. 27

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+10}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{14}}{2};$$

$$y_1 = -1 + \frac{\sqrt{14}}{2} \approx -1 + 3{,}7 = 2{,}7; \quad y_2 \approx -4{,}7,$$

т. е. парабола пересекает ось Oy в точках $A(0; y_1)$ и $B(0; y_2)$. Если $y = 0$, то $x = -5$, следовательно, парабола пересекает ось Ox в точке $C(-5; 0)$.

222. Определить координаты фокуса параболы $y^2 = 8x$.

223. Найти координаты фокуса параболы $x^2 = 6y$.

224. Определить координаты фокуса параболы $y^2 = -4x$ и написать уравнение ее директрисы.

225. Составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 9x$.

226. Построить параболы, заданные уравнениями: 1) $y^2 = x$; 2) $y^2 = -x$; 3) $x^2 = y$; 4) $x^2 = -y$.

227. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние фокуса от вершины равно 4.

228. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние фокуса от директрисы равно 3.

229. Написать уравнение параболы: 1) проходящей через точки (0; 0), (−2; 3) и симметричной относительно оси Ox; 2) проходящей через точки (0; 0), (−3; −4) и симметричной относительно оси Oy; 3) проходящей через точки (0; 0), (2; 3) и симметричной относительно оси Oy.

230. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 2x$ с прямыми: 1) $y = x$; 2) $2y + x - 6 = 0$; 3) $y = 3$; 4) $y = -4$.

231. Составить уравнение параболы, если: 1) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку (2; −5)

и вершина ее лежит в начале координат; 2) парабола симметрична относительно оси Oy, фокус лежит в точке (0; 4) и вершина совпадает с началом координат; 3) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $(-6; -3)$ и вершина ее лежит в начале координат.

232. Арка моста имеет форму параболы. Определить параметр p этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 *м*, а высота 6 *м*.

233. Поперечный разрез зеркала прожектора имеет форму параболы. Определить положение фокуса, если диаметр зеркала 60 *см*, а глубина его 30 *см*.

234. Написать уравнение параболы, если известно, что она проходит через точку (2; 2), что вершина ее лежит в начале координат, осью симметрии является ось Ox. Найти длину ее хорды, проходящей через точку (8; 0) и наклоненной к оси параболы под углом 60°.

235. Дана парабола $x^2 = 8y$. Найти длину ее хорды, проходящей через точку $(-6; 0)$ и наклоненной к оси симметрии параболы под углом 45°.

236. Построить параболы, заданные уравнениями:

1) $y = 5x^2$; 2) $y = -3x^2$; 3) $x = 2y^2$; 4) $x = -4y^2$.

237. Найти координаты вершин следующих парабол:

1) $y = 2x^2 + 4x - 8$; 2) $x^2 - 6x + y - 7 = 0$;

3) $y^2 + 8y - 2x + 10 = 0$; 4) $y^2 - 4y^2 + x - 6 = 0$

и построить их графики.

238. Привести к простейшему виду уравнения кривых:

1) $y = x^2 + 8x + 5$; 2) $y = -x^2 - 4x + 3$;

3) $y = 2x^2 + 3x$; 4) $x = 3y^2 - 4y$;

5) $y^2 - 4y - 4x = 0$; 6) $x = y^2 - 6y + 11$.

239. Составить уравнение параболы, если даны координаты фокуса $F(3; 0)$ и уравнение директрисы $x = -2$. Полученное уравнение привести к каноническому виду. Построить параболу.

240. Парабола проходит через точку $(-1; -1)$ и имеет вершину в точке $\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$. Найти уравнение параболы, если ее ось параллельна оси Oy.

241. Парабола проходит через точку (2; 3) и имеет вершину в точке (7; 8). Найти уравнение параболы, если ось ее параллельна оси Ox.

242. Найти уравнение параболы, если начало координат совпадает с фокусом и если осью параболы служит ось Ox; параметр равен p.

243. Найти уравнение параболы, если начало координат совпадает с фокусом и если осью параболы служит ось Oy; параметр равен p.

244. Найти координаты вершины и фокуса, уравнения оси и директрисы параболы

$$y^2 + 4y - 6x + 7 = 0.$$

245. Найти координаты вершины и фокуса, уравнения оси и директрисы параболы

$$4x^2 + 4x + 3y - 2 = 0.$$

Уравнение равносторонней гиперболы с асимптотами, параллельными осям координат

Прямая T называется *асимптотой* кривой L, если при неограниченном удалении точки M кривой от начала координат (в том или другом направлении) расстояние d этой точки от прямой стремится к нулю (рис. 28; см. рис. 66, 67).

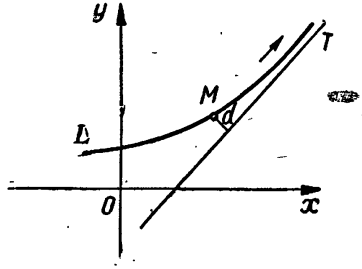


Рис. 28

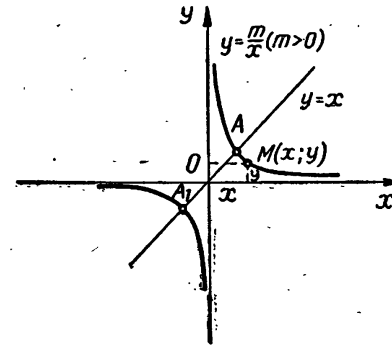


Рис. 29

Равносторонняя гипербола, асимптоты которой являются осями координат, определяется уравнением вида

$$xy = m \text{ или } y = \frac{m}{x}, \text{ или } x = \frac{m}{y}, \qquad (11)$$

где $m = \text{const} \neq 0$. График этой кривой есть график обратной пропорциональности*.

Из уравнения (11) следует, что если $m > 0$, то переменные x и y имеют одинаковые знаки, т. е. гипербола расположена в I и III квадрантах. Если же $m > 0$, то ветви гиперболы расположены во II и IV квадрантах (рис. 29).

Из уравнения (11) также следует, что если x неограниченно возрастает по абсолютной величине, то y стремится к нулю, т. е. по мере удаления точки гиперболы $M(x; y)$ от начала координат расстояние этой точки от оси Ox стремится к нулю. Следовательно, ось Ox есть горизонтальная асимптота гипер-

* Общее определение гиперболы дано в задаче 262.

болы. Аналогично, если y неограниченно возрастает по абсолютной величине, то x стремится к нулю, т. е. по мере удаления точки гиперболы $M(x; y)$ от начала координат расстояние этой точки от оси Oy стремится к нулю. Следовательно, ось Oy есть вертикальная асимптота гиперболы.

У гиперболы две вершины A и A_1, каждая из них имеет равные по абсолютной величине координаты, т. е. $|x| = |y| = \sqrt{|m|}$. Прямая, проходящая через вершины гиперболы, уравнение которой $y = x\,(m > 0)$, называется *действительной осью* симметрии гиперболы; прямая, перпендикулярная к действительной оси, уравнение которой $y = -x$, называется *мнимой осью*. Если $m < 0$, то уравнение действительной оси симметрии гиперболы $y = -x$ и мнимой $y = x$.

Расстояние d от начала координат до вершины гиперболы равно $\sqrt{2|m|}$.

Гиперболы $xy = m$ и $xy = -m$ называются *сопряженными*.

Уравнение равносторонней гиперболы с асимптотами, параллельными осям координат, имеет вид

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}\left(x \neq -\frac{d}{c},\ c \neq 0,\ ad \neq bc\right). \tag{12}$$

Требование, чтобы $x \neq -\frac{d}{c}$, очевидно. Если $c = 0$, то получим уравнение прямой линии $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. Если $ad = bc$ или $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda = \text{const}$, то $a = c\lambda$, $b = d\lambda$, и мы получим уравнение прямой линии, параллельной оси Ox:

$$y = \frac{\lambda(cx + d)}{cx + d} = \lambda = \text{const}.$$

Из формулы (12), разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочлена на многочлен), найдем

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2\left(x + \frac{d}{c}\right)}$$

или

$$y - \frac{a}{c} = \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}},$$

отсюда

$$Y = \frac{m}{X}, \tag{13}$$

где

$$m = \frac{bc - ad}{c^2},\quad X = x + \frac{d}{c},\quad Y = y - \frac{a}{c}. \tag{14}$$

Из выражений (14) следует, что $x = X - \frac{d}{c}$, $y = Y + \frac{a}{c}$,

отсюда $\alpha = -\frac{d}{c}$, $\beta = \frac{a}{c}$ (см. формулы (4)). Следовательно, в новой системе координат XO_1Y с началом в точке $O_1\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ уравнение (13) представляет гиперболу, асимптотами которой служат оси координат O_1X и O_1Y, параллельные осям координат Ox и Oy.

246. Написать уравнение равносторонней гиперболы, если известно, что она проходит через точку (1; 4). Найти координаты вершин гиперболы и расстояние между ними. Построить гиперболу.

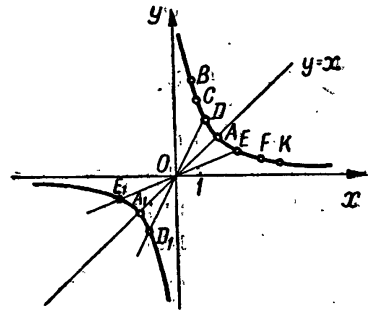


Рис. 30

Р е ш е н и е. По условию задачи $1 \cdot 4 = m$, или $m = 4$, отсюда искомое уравнение гиперболы $xy = 4$. Так как $m = 4 > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III квадрантах. Вершины гиперболы $A(2; 2)$ и $A_1(-2; -2)$.

Расстояние между вершинами гиперболы

$$d = \sqrt{(2+2)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}64.$$

Сначала построим ветвь гиперболы в I квадранте. Составим таблицу положительных значений x, y:

x	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	2	3	4	5
y	5	4	3	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$

Построим точки B, C, D, A, E, F, K, соответствующие парам чисел таблицы, и соединим их плавной кривой (рис. 30).

Для построения ветви гиперболы в III квадранте можно воспользоваться составленной таблицей, в которой значения x и y следует взять со знаком минус, либо построить ряд точек (E_1, D_1 и др.), симметричных произвольным точкам построенной ветви кривой по отношению к началу координат, и соединить их плавной кривой линией.

247. Преобразовать уравнение гиперболы $y = \frac{2x-3}{x-1}$ путем параллельного переноса осей, если за новое начало координат

принята точка $O_1(1; 2)$. Найти вершины гиперболы, уравнения действительной и мнимой оси симметрии в новой системе координат и в прежней.

Решение. Воспользуемся формулами (4). Подставив в данное уравнение $x = X + 1$, $y = Y + 2$, получим:

$$Y + 2 = \frac{2X + 2 - 3}{X + 1 - 1},$$

отсюда

$$Y + 2 = 2 + \frac{-1}{X} \text{ или } Y = -\frac{1}{X}.$$

В новой системе координат XO_1Y ветви гиперболы расположены во II и IV квадрантах ($m = -1 < 0$). Координаты вершины равносторонней гиперболы удовлетворяют условию $|X| = |Y| = \sqrt{|m|} = \sqrt{|-1|} = 1$. Следовательно, с учетом квадрантов вершины искомой гиперболы $A(-1; 1)$ и $A_1(1; -1)$, а в прежней системе координат $A(0; 3)$ и $A_1(2; 1)$.

Уравнение действительной оси симметрии есть биссектриса II и IV координатных углов

$$Y = -X;$$

в прежней системе координат

$$y - 2 = -(x - 1) \text{ или } x + y - 3 = 0.$$

Уравнение мнимой оси в новой системе координат

$$Y = X;$$

в прежней системе координат

$$y - 2 = x - 1 \text{ или } x - y + 1 = 0.$$

248. Уравнение гиперболы $y = \frac{1 - 3x}{2x - 1}$ с помощью параллельного переноса осей координат привести к виду $XY = m$. Построить эту гиперболу.

Решение. В данном уравнении, разделив числитель на знаменатель, получим:

$$y = -\frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} \text{ или } y + 1{,}5 = \frac{-0{,}25}{x - 0{,}5},$$

$$\text{или } Y = -\frac{0{,}25}{X}, \text{ или } XY = -0{,}25,$$

где $X = x - 0{,}5$ и $Y = y + 1{,}5$.

Начало новой системы координат находится в точке $O_1(0{,}5; -1{,}5)$. Так как $m = -0{,}25 < 0$, то ветви гиперболы расположены во II и в IV квадрантах. Найдем точки пересечения гиперболы со старыми осями координат. Пусть в данном

уравнении $x=0$, тогда $y=-1$; если $y=0$, то $x=\frac{1}{3}$, следовательно, точки пересечения: $B(0;\ -1)$ и $C\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$. Теперь построим гиперболу (рис. 31).

249. Построить гиперболы, заданные уравнениями: 1) $xy=2$; 2) $xy=-2$. Как называются эти гиперболы? Какой геометрический образ соответствует уравнению $xy=0$?

250. Написать уравнение равносторонней гиперболы, если известно, что она проходит через точку $(-2;\ 4{,}5)$. Найти координаты вершин гиперболы и расстояние между ними. Построить гиперболу.

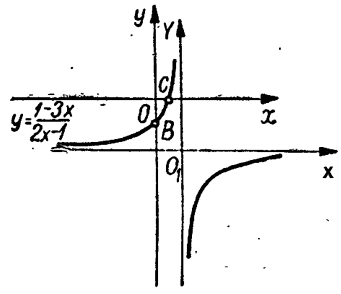


Рис. 31

251. Уравнения гипербол:

1) $y=\frac{x+2}{x-1}$; 2) $y=\frac{4x+1}{3x+2}$

с помощью параллельного переноса осей координат привести к виду $XY=m$. Построить гиперболы.

252. Найти координаты центра гиперболы $y=\frac{7x+2}{2x-3}$.

253. Преобразовать уравнение $y=\frac{2-3x}{x-4}$ путем параллельного переноса осей, если за новое начало координат принята точка $O_1(4;\ -3)$. Построить кривую.

254. Найти координаты вершин гиперболы

$$y=\frac{2x-5}{x+3}.$$

255. Преобразовать уравнение $y=\frac{4x+1}{x+3}$ путем параллельного переноса осей координат, принимая за новое начало координат точку пересечения асимптот кривой. Построить эту кривую.

256. Преобразовать уравнение гиперболы $y=\frac{x-11}{2x+3}$ с помощью параллельного переноса осей, если за новое начало координат принята точка $O_1(-1{,}5;\ 0{,}5)$. Найти вершины гиперболы, уравнения действительной оси симметрии и мнимой в новой системе координат и в прежней. Построить гиперболу.

257. Найти уравнение равносторонней гиперболы, если известны точка пересечения ее асимптот $O_1(-2;\ 3)$ и одна из ее вершин $A(-4;\ 1)$.

§ 9. Смешанные задачи на кривые второго порядка

258. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до двух данных точек $A(-2; 1)$ и $B(3; -4)$ равно $\sqrt{2}$. Сделать чертеж.

259. Определить траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(1; 0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(-2; 0)$.

260. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F и F_1, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$. Составить уравнение эллипса, зная, что расстояние между его фокусами равно $2c$.

261. Определить траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $F(0; 1)$ остается вдвое меньше расстояния от прямой $y = 4$.

262. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек (фокусов гиперболы) есть величина постоянная, равная по абсолютной величине $2a\,(a > 0)$. Расстояние между фокусами равно $2c\,(a < c)$. Написать уравнение гиперболы.

263. Найти траекторию точки, которая при своем движении остается все время в два раза дальше от точки $F(0; 4)$, чем от прямой $y = 1$.

264. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до данной точки $B(3; 2)$ и до данной прямой $x + y - 2 = 0$ равно $\sqrt{2}$. Сделать чертеж.

265. Перенесением начала координат, сохраняя направление осей, упростить уравнения:

1) $\frac{(x-7)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$;
2) $(x+1)^2 = 4 - (y-4)^2$;
3) $2y = -3(x+5)^2$;
4) $x^2 = 2(y-7)$;
5) $(x-4)^2 = 5(y+3)$;
6) $(x-2)(y+7) = 4$.

Построить старые и новые оси координат и кривые.

266. Построить кривые, заданные уравнениями:

1) $(y-2)^2 = 0{,}5(x+1)$;
2) $(y-4)(x-4) = 4$;
3) $y = \frac{x+2}{2x+3}$.

267. В уравнении параболы $y = x^2 + px + q$ найти значения параметров p и q. Известно, что парабола проходит через точку $A(-1; 3)$ и что ее ось симметрии дана уравнением $x = 4$.

268. В параболу $y^2 = 2px$ вписан равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с вершиной параболы. Найти длину стороны треугольника.

269. Парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точки $A(3; 8)$ и $B(2; 3)$. Составить уравнение параболы и вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого совпадает с вершиной параболы, а две другие являются точками пересечения параболы с прямой $y = 3$.

270. Равносторонняя гипербола задана уравнением $xy = -3$. Написать ее уравнение в системе координат XO_1Y, оси которой параллельны осям координат системы xOy, а начало находится в точке $O_1(3; 5)$. Найти точки пересечения заданной гиперболы с осями координат новой системы.

271. Найти длину хорды, соединяющей точки пересечения двух парабол, имеющих общую вершину в начале координат, а фокусы в точках (2; 0) и (0; 2). Сделать чертеж.

272. Найти площадь треугольника, вершина которого лежит в центре окружности $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$, а основанием треугольника служит вырезанный окружностью отрезок на оси абсцисс.

273. Найти уравнение окружности, проходящей через точки пересечения параболы $y^2 = x + 4$ с осями координат.

274. Найти точки пересечения кривой $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$ и прямой $x + y - 3 = 0$. Определить расстояние между этими точками. Сделать чертеж.

275. Найти расстояние от точки $M(1; 6)$, лежащей на параболе $y = -x^2 + 4x + 3$, до фокуса параболы.

276. Составить уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$ и параллельна прямой $3x - 4y + 1 = 0$.

Глава III Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве

§ 1. Координаты в пространстве

Прямоугольные координаты

Положение точки в пространстве будем определять относительно пространственной декартовой прямоугольной системы координат, состоящей из трех взаимно перпендикулярных осей координат, пересекающихся в одной и той же точке O. Эта точка называется *началом координат*. Ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат* и ось Oz — *осью аппликат*. Положительное направление каждой из осей указывается стрел-

кой (рис. 32). Длина произвольно выбранного отрезка ($OE = e$) принимается за единицу масштаба. Положение точки M в пространстве определяется тремя числами — координатами x, y и z этой точки. Абсцисса $x = \frac{OP}{e}$, ордината $y = \frac{OQ}{e}$, аппликата $z = \frac{OR}{e}$, где OP, OQ, OR — соответственно величины направленных отрезков $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$.

Каждой точке M в пространстве относительно построенной системы координат соответствует тройка чисел $(x; y; z)$ и, наоборот, каждой тройке чисел $(x; y; z;)$ соответствует точка M в пространстве.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством точек пространства и множеством троек чисел, взятых в определенном порядке. Если числа x, y, z — координаты точки M, то записывают так: $M(x; y; z)$. Координатные оси Ox, Oy, Oz, взятые попарно, определяют три взаимно перпендикулярные плоскости xOy, yOz, xOz, называемые *координатными плоскостями*. Координатные плоскости делят пространство на восемь частей (октантов). Координаты точек различных октантов имеют разные знаки. В зависимости от знаков координат занумеруем октанты следующим образом:

Октант	Знаки координат		
	x	y	z
I	+	+	+
II	−	+	+
III	−	−	+
IV	+	−	+
V	+	+	−
VI	−	+	−
VII	−	−	−
VIII	+	−	−

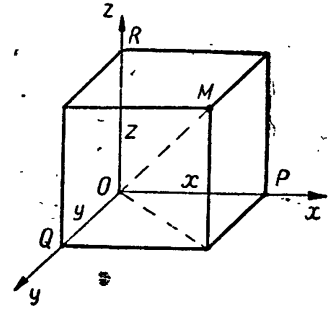


Рис. 32

Если точка M лежит на координатной плоскости xOy, то ее аппликата $z = 0$; аналогично для точек, лежащих в плоскости yOz, абсцисса $x = 0$ и для точек плоскости xOz ордината $y = 0$. Если точка M лежит на оси Ox, то координаты $y = z = 0$; аналогично для точек, лежащих на оси Oy, координаты $x = z = 0$ и для точек оси Oz координаты $x = y = 0$. Координаты точки, лежащей в начале координат, равны нулю.

277. Построить точки $A(3; 2; 6)$, $B(-2; 3; 1)$, $C(1; -4; -2)$, $D(1; -2; -1)$, $E(0; 4; 1)$, $F(0; 2; 0)$, $P(0; 0; 0)$. Указать особенности положения точек.

Решение. На оси Ox в положительном направлении отложим отрезок OM, величина которого равна 3 единицам выбранного масштаба, через точку M проведем прямую, параллельную оси Oy, и отложим отрезок MN в положительном направлении, равный 2. Через точку N проведем прямую, параллельную оси Oz и отложим вверх от плоскости xOy отрезок NA, равный 6. Конец этого отрезка и дает искомую точку A (рис. 33).

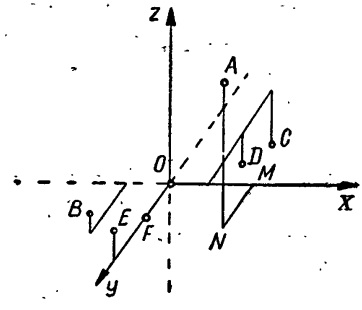


Рис. 33

Остальные точки строятся аналогично.

Точка A находится в I октанте, точка B — во II октанте, точка C — в VIII октанте, точка D — в VIII октанте, точка E лежит в плоскости yOz, точка F — на оси Oy и точка P — в начале координат.

278. Построить точки $A(2; -4; 3)$, $B(2; 0; 4)$, $C(0; 3; -2)$, $D(2; 1; 0)$, $E(-1; 0; 0)$, $F(0; 2; 0)$. Каковы особенности их расположения?

279. Даны точки $(2; -3; 1)$ и $(a; b; c)$. Найти координаты точек, симметричных данным относительно координатных плоскостей, осей координат, начала координат.

280. Как расположены в пространстве точки, для которых 1) $x = y$, 2) $y = z$, 3) $x = z$?

281. Где расположены точки $A(0; y; z)$, $B(x; 0; z)$, $C(x; y; 0)$, $D(x; 0; 0)$, $E(0; y; 0)$, $F(0; 0; z)$?

282. Куб находится в I октанте и стоит на плоскости xOy, три его ребра совпадают с осями координат. Найти координаты вершин куба, зная, что ребро его равно a.

283. Куб стоит на плоскости xOy, центр его основания совпадает с началом координат, боковые ребра лежат в координатных плоскостях. Найти координаты вершин куба, зная, что его ребро равно a.

Простейшие задачи (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении)

1. Расстояние d между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1)$$

В частности, расстояние d точки $M(x; y; z)$ от начала координат (т. е. длина отрезка OM, см. рис. 32) находится по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (2)$$

2. Если даны две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты точки C, делящей отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$ $(\lambda \neq -1)$, где AC и CB — величины направленных отрезков $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ оси, проведенной через точки A и B, определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (3)$$

В частности, если точка C делит отрезок $\overline{AB}$ пополам, то $\lambda = 1$, и тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad (4)$$

т. е. координаты середины отрезка равны полусуммам (одноименных) координат его начала и конца.

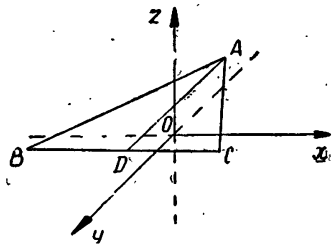


Рис. 34

284. Даны вершины треугольника $A(2; 0; 3)$, $B(-5; 2; 1)$, $C(3; 2; 1)$. Найти длину его медианы, проведенной из вершины A.

Решение. Координаты точки D (рис. 34) найдем по формулам (4):

$$x = \frac{-5+3}{2} = -1; \quad y = \frac{2+2}{2} = 2; \quad z = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Длину AD найдем по формуле (1):

$$AD = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}12.$$

285. Определить расстояние точки $A(-3; 4; 5)$ от начала координат и от осей координат.

286. Найти расстояние между точками $(1; -2; 3)$ и $(1; 2; -2)$.

287. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(-3; 1; 5)$ и $B(2; 5; -1)$.

288. Найти стороны треугольника с вершинами $A(1; 0; -1)$, $B(2; 2; -3)$, $C(-1; 2; 0)$.

289. Отрезок $\overline{AB}$ разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления, если известны точки $A\left(\frac{5}{2}; -\frac{11}{4}; \frac{17}{4}\right)$ и $B(-5; 1; 3)$.

290. Найти координаты точки C, делящей отрезок $\overline{AB}$ внешним образом, если точки $A(2; 0; 3)$, $B(0; 1; 2)$ и точка C находятся от начала отрезка в три раза ближе, чем от его конца.

§ 2. Элементы векторной алгебры

Скалярные и векторные величины. Коллинеарность и компланарность векторов. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на скаляр. Единичные векторы. Разложение вектора по данным направлениям в плоскости и в пространстве

1. Величины, которые полностью характеризуются своим численным значением в выбранной системе единиц, называются *скалярными* или *скалярами*. Например, длина отрезка, площадь, объем, масса, время, температура и т. д. Простейшей скалярной величиной является отвлеченное число. Скаляры обозначают малыми или большими буквами латинского или греческого алфавита (a, b, c, m, n, p, M, N, P, x, y, z, α, β, γ, ...). Величины, которые характеризуются численным значением и направлением, называются *векторными* или *векторами*. Например, сила, скорость, ускорение и т. д.

Векторные величины изображаются геометрическими векторами, т. е. отрезками в пространстве, снабженными стрелками. Стрелка указывает направление, а длина отрезка (в принятых единицах длины) дает численное значение вектора и называется *длиной* или *модулем*, или *абсолютной величиной*, или *скаляром вектора*. Заметим, что модуль вектора всегда величина положительная или равная нулю.

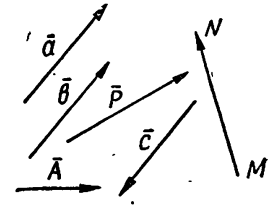


Рис. 35

Векторы обозначаются жирными буквами: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$ или буквами с черточкой сверху: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots$, или двумя буквами с черточкой сверху, причем первая буква показывает начало направленного отрезка (вектора), а вторая — его конец: $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и т. д. (рис. 35).

Модули (длины) векторов $\boldsymbol{a}$, $\bar{b}$, $\overline{AB}$ обозначаются соответственно $|\boldsymbol{a}|$ или a, $|\bar{b}|$ или b, $|\overline{AB}|$ или $|AB|$.

Векторы, параллельные одной прямой, называются *коллинеарными*. Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*. Так, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (см. рис. 35) коллинеарные, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одинаковое направление, векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ — противоположное. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *рав-*

ными, если они одинаково направлены и имеют равные модули. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{c}$ называются *противоположными*, если они противоположно направлены и имеют равные модули. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$. Если начало вектора совпадает с его концом, то вектор называется нулевым или нуль-вектором. Направление нулевого вектора неопределенно. Все нулевые векторы равны между собой.

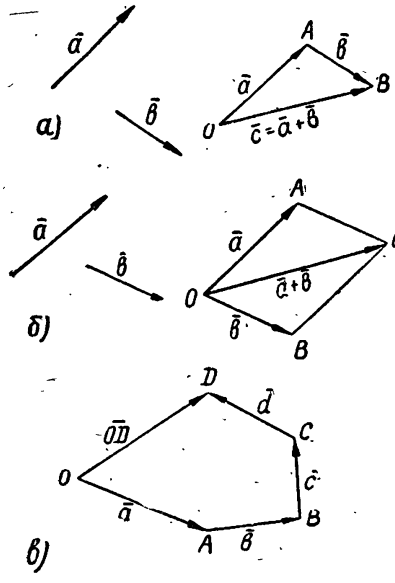


Рис. 36

Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому можно взять в пространстве за начало любую точку O и считать, что все векторы исходят из этой точки.

2. Сложение векторов. *Суммой* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который получается следующим образом: из любого начала O строим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$, из конца этого вектора строим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$, начало первого вектора соединяем с концом второго (рис. 36, *а*). Вектор $\overline{OB} = \bar{c}$ есть сумма векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ (правило треугольника).

Из определения сложения векторов следует, что сумма противоположных векторов равна нуль-вектору:

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = 0.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, то сумму этих векторов можно найти по правилу параллелограмма, а именно: из произвольного начала O строим векторы $\overline{OA} = \bar{a}$ и $\overline{OB} = \bar{b}$. На отрезках $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ строим параллелограмм $OACB$ (рис. 36, *б*).

Вектор диагонали $\overline{OC} = \bar{c}$ есть сумма векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$. Этот же результат следует и из правила треугольника. Действительно, так как $\overline{OB} = \overline{AC} = \bar{b}$ (рис. 36, *б*), следовательно, $\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$, т. е. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$.

Если число слагаемых больше двух, то для нахождения суммы, например, четырех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ применяют правило многоугольника, состоящее в следующем: строим векторы

$\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{AB}=\bar{b}$; $\overline{BC}=\bar{c}$, $\overline{CD}=\bar{d}$, получаем ломаную линию $OABCD$ (рис. 36, *в*); замыкающий вектор $\overline{OD}$ этой ломаной линии будет вектором суммы данных векторов, т. е. $\overline{OD}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$ (эти векторы могут и не лежать в одной плоскости).

Заметим, что сумма векторов обладает свойством переместительности: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ и свойством сочетательности: $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

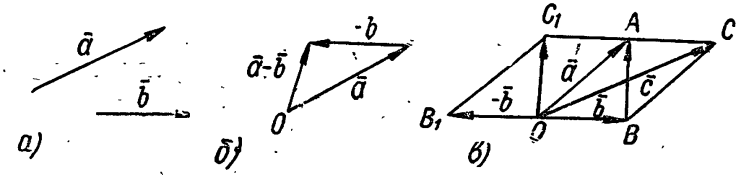


Рис. 37

Правило многоугольника есть следствие правила треугольника и сочетательного свойства векторов.

3. Вычитание векторов. Разность двух векторов $\bar{a}-\bar{b}$ (рис. 37, *а*) можно заменить суммой $\bar{a}+(-\bar{b})$. Отсюда следует: чтобы из вектора $\bar{a}$ вычесть вектор $\bar{b}$, надо к вектору $\bar{a}$ прибавить противоположный вектор $-\bar{b}$. Следовательно, для построения вектора $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$ можно воспользоваться правилом треугольника (рис. 37, *б*) либо правилом параллелограмма (рис. 37, *в*). Правило параллелограмма применимо, как уже говорилось, при условии, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны.

Из построения (рис. 37, *в*) следует: чтобы получить разность векторов $\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}$, нужно привести векторы к общему началу O, а затем построить вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с концом вектора $\bar{b}$, а конец его — с концом вектора $\bar{a}$. Итак, если на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить параллелограмм, то одна диагональ $\overline{OC}$ есть сумма $\bar{a}+\bar{b}$, а другая $\overline{BA}$ есть разность $\bar{a}-\bar{b}$.

4. Умножение вектора на скаляр. При умножении вектора $\bar{a}$ на скаляр α длина вектора умножается на $|\alpha|$, а направление сохраняется, если $\alpha>0$, и изменяется на противоположное, если $\alpha<0$.

Деление вектора $\bar{a}$ на скаляр β ($\beta\neq 0$) сводится к умножению вектора на обратную величину скаляра:

$$\frac{\bar{a}}{\beta}=\bar{a}\frac{1}{\beta}.$$

Умножение вектора на скаляр подчиняется:

1) закону переместительности:

$$\alpha \bar{a} = \bar{a} \alpha;$$

2) закону распределительности:

$$\alpha (\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \bar{a} + \alpha \bar{b}$$

и

$$(\alpha + \beta) \bar{a} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{a};$$

3) закону сочетательности:

$$\alpha (\beta \bar{a}) = (\alpha \beta) \bar{a}.$$

Из определения умножения следует, что если $\bar{a}$ и $\bar{b} (b \neq 0)$ — два коллинеарных вектора, то всегда можно найти такое число λ (скаляр), что

$$\bar{a} = b\bar{\lambda},$$

отсюда

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \lambda.$$

Если вектор $\bar{a}^0$ имеет длину, равную единице масштаба, и одинаковое направление с вектором $\bar{a}$ $(a \neq 0)$, то он называется единичным вектором или ортом вектора $\bar{a}$. Очевидно, что

$$\bar{a} = \bar{a}^0 a \text{ или } \bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{a}. \tag{1}$$

5. Разложение векторов. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы, т. е.

$$\bar{a} = \lambda \bar{b}, \tag{2}$$

или

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} = 0, \tag{3}$$

и наоборот, если имеет место равенство (2) или (3), то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны (α, β — скаляры).

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, то они линейно зависимы, т. е. имеет место соотношение

$$\bar{c} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b} \tag{4}$$

или

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c} = 0, \tag{5}$$

и наоборот, если имеет место равенство (4) или (5), то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны (α, β, γ — скаляры, не равные нулю одновременно).

Иначе говоря, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, то всякий компланарный им вектор $\bar{c}$ можно разложить по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Если мы имеем три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, то всякий четвертый вектор $\bar{d}$ может быть разложен по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, т. е. представлен соотношением

$$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}.$$

Иначе говоря, между любыми четырьмя векторами существует линейная зависимость, т. е.

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} + \lambda\bar{d} = 0,$$

где α, β, γ, λ не равны нулю одновременно.

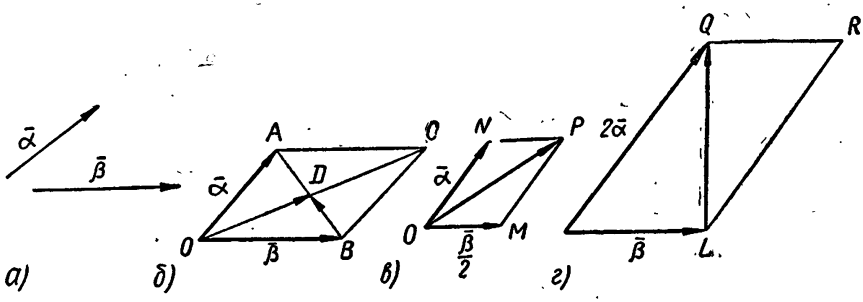


Рис. 38

291. Найти сумму и разность неколлинеарных векторов $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$.

292. Пусть даны векторы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ (рис. 38, *а*).

Построить каждый из следующих векторов:

1) $\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2}$; 2) $\frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{2}$; 3) $-\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2}$; 4) $\frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{2}$; 5) $\bar{\alpha}+\frac{\bar{\beta}}{2}$; 6) $2\bar{\alpha}-\bar{\beta}$.

Решение. Приведем векторы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ к общему началу O и на них построим параллелограмм (рис. 38, *б*). Нам уже известно, что $\overline{OC} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\overline{BA} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$, следовательно, $\overline{OD} = \frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2}$, $\overline{BD} = \frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{2}$.

Векторы 3 и 4 противоположны соответственно векторам 1 и 2, следовательно, вектор $-\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2} = \overline{CD}$ (или $\overline{DO}$), вектор $\frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{2} = -\frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{2} = \overline{AD}$(или $\overline{DB}$).

Построение векторов 5 и 6 ясно из рис. 38, *в*, *г*:

$$\left(\overline{OP} = \bar{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{2};\ \overline{LQ} = 2\bar{\alpha} - \bar{\beta}\right).$$

Векторы 1 — 6 можно построить и по правилу треугольника.

293. Четырехугольник $ABCD$ есть ромб. Равны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$, векторы $\overline{CB}$ и $\overline{AD}$, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

294. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм; O — точка пересечения его диагоналей. Обозначим векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ буквами $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ следующие векторы: $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{DC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AO}$, $\overline{OA}$, $\overline{CO}$, $\overline{OC}$, $\overline{BO}$, $\overline{OB}$.

295. Проверить аналитически и геометрически векторные тождества:

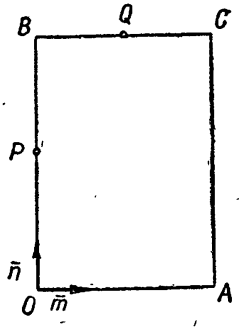


Рис. 39

1) $\frac{\bar{a}}{2}-\frac{\bar{b}}{2}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$;

2) $\bar{a}+\frac{\bar{b}-\bar{a}}{2}=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$;

3) $\bar{a}-\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$;

4) $(\bar{a}+\bar{b})+(\bar{a}-\bar{b})=2\bar{a}$;

5) $(\bar{a}+\bar{b})-(\bar{a}-\bar{b})=2\bar{b}$.

296. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AB}=\bar{p}$, $\overline{AD}=\bar{q}$, $\overline{AA_1}=\bar{r}$.

Выразить векторы диагоналей $\overline{AC_1}$ и $\overline{C_1A}$, $\overline{BD_1}$ и $\overline{D_1B}$, $\overline{A_1C}$ и $\overline{CA_1}$ через векторы $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ (сделать чертеж). Построить вектор $\bar{q}-\bar{p}+\frac{1}{2}\bar{r}$.

297. По сторонам $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$ (рис. 39). Выразить через $\bar{m}$ и $\bar{n}$ векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$, если $OA=3$ и $OB=5$.

298. Пусть P — середина OB и Q — середина BC (рис. 39). Найти векторы $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{PQ}$ при $OA=3$, $OB=5$.

299. В параллелограмме $ABCD$ даны диагонали $\overline{AC}=\bar{a}$ и $\overline{BD}=\bar{b}$. Разложить по этим двум векторам все векторы, совпадающие со сторонами параллелограмма: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

300. В треугольнике ABC векторы $\overline{AB}=\bar{c}$, $\overline{AC}=\bar{b}$ и медиана $\overline{AD}=\bar{p}$. Разложить вектор $\bar{p}$ по векторам $\bar{c}$ и $\bar{b}$, вектор $\bar{b}$ по векторам $\bar{p}$ и $\bar{c}$.

301. В треугольнике ABC сторона BC разделена точкой D в отношении $m:n$, т. е. $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{m}{n}$. Разложить вектор $\overline{AD}$ по векторам $\overline{AB} = \bar{c}$ и $\overline{AC} = \bar{b}$.

302. Какому условию должны удовлетворять три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, чтобы из них можно было образовать треугольник?

Проекция вектора на ось, теорема о проекциях. Составляющие (компоненты) и проекции (координаты) вектора. Разложение вектора по ортам. Скалярное произведение двух векторов и его свойства. Выполнение операций над векторами, заданными своими разложениями по ортам

6. Прямую, на которой задан единичный вектор, будем называть *осью*.

Проекцией точки M на данную ось называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную ось.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось называется величина A_1B_1 направленного отрезка $\overline{A_1B_1}$, заключенного между проекциями начала и конца вектора $\overline{AB}$ (рис. 40).

Обозначение: $\text{пр}_{Ox}\,\overline{AB} = A_1B_1$ или $\text{пр}_{\bar{e}}\,\overline{AB} = A_1B_1$, где $\bar{e} = \overline{OE}$ есть единичный вектор, т. е. $|\bar{e}| = 1$.

Таким образом, проекция вектора на ось есть скаляр. Очевидно, что

$$A_1B_1 = |\overline{AB}| \cdot \cos(\widehat{\bar{e}, \overline{AB}}).$$

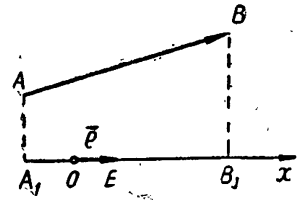


Рис. 40

Если векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ равны, то их проекции на одну и ту же ось также равны.

Заметим, что проекция суммы (разности) векторов равна сумме (разности) проекций данных векторов:

$$\text{пр}\,(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = \text{пр}\,\bar{a} + \text{пр}\,\bar{b} - \text{пр}\,\bar{c}.$$

При умножении вектора $\bar{a}$ на какое-либо число α проекция вектора $\bar{a}$ умножается на это же число:

$$\text{пр}\,(\alpha\bar{a}) = \alpha\,\text{пр}\,\bar{a}.$$

7. Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве (рис. 41). Единичные векторы (орты) осей Ox, Oy, Oz принято обозначать буквами $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, причем $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$.

Вектор $\overline{OM}$, идущий от начала O к точке M, называется *радиус-вектором* точки M. Разложим этот вектор по направлениям векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Получим

$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \qquad (6)$$

Слагаемые векторы $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$ называются *составляющими* или *компонентами вектора* $\overline{OM}$.

Учитывая, что $\overline{OM_1} = X\bar{i}$, $\overline{OM_2} = Y\bar{j}$, $\overline{OM_3} = Z\bar{k}$, где X, Y, Z — величины направленных отрезков $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$, или проекции вектора $\overline{OM}$ на оси Ox, Oy, Oz, можно соотношение (6) записать так:

$$\bar{r} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}; \tag{7}$$

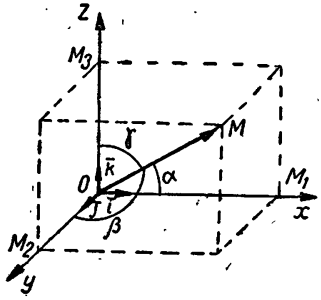


Рис. 41

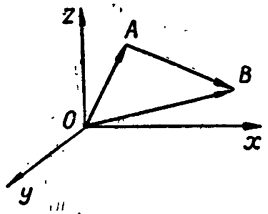


Рис. 42

X, Y, Z называются *координатами вектора* $\bar{r}$ (в данном случае X, Y, Z совпадают с координатами x, y, z точки M).

Вектор $\bar{r}$, заданный координатами X, Y, Z, можно обозначать так:

$$\bar{r} = \{X;\ Y;\ Z\} \text{ или } \bar{r}\{X;\ Y;\ Z\}.$$

Если вектор $\overline{AB}$ задан координатами начальной точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и конечной $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его координаты равны разностям соответствующих координат конечной и начальной точек, т. е.

$$X = x_2 - x_1;\ Y = y_2 - y_1;\ Z = z_2 - z_1,$$

отсюда

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

Это следует из соотношения (рис. 42):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Из свойств проекций векторов на ось вытекают свойства координат векторов и действия над векторами в координатах.

Если $\bar{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$, то

$$\bar{a} \pm \bar{b} = \{X_1 \pm X_2;\ Y_1 \pm Y_2;\ Z_1 \pm Z_2\}.$$

Если $\bar{a} = \{X;\ Y;\ Z\}$ и α — скаляр, то

$$\alpha\bar{a} = \{\alpha X;\ \alpha Y;\ \alpha Z\}.$$

8. *Скалярным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = ab\cos\varphi, \tag{8}$$

отсюда

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}, \tag{9}$$

т. е. косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, деленному на произведение их длин. Из равенства (8) следует, что $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

Скалярное произведение $\bar{a}\bar{b} = 0$ тогда, когда один из сомножителей равен нулю или векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны ($\varphi = 90°$).

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то $\bar{a}\bar{b} = \pm ab$ ($\varphi = 0$ или $\varphi = 180°$).

Справедливо также свойство распределительности

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$$

и свойство сочетательности относительно скалярного множителя

$$\alpha(\bar{a}\bar{b}) = (\alpha\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\alpha\bar{b}).$$

Из равенства (8) также следует, что

$$\bar{a}\bar{a} = a^2\cos 0 = a^2, \tag{10}$$

т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Из равенства (10) следует, что

$$a = \sqrt{(\bar{a})^2}. \tag{11}$$

9. Пусть

$$\bar{a} = \{X;\ Y;\ Z\},\quad \bar{b} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}.$$

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\bar{a}\bar{b} = (X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k})\ (X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k}).$$

Используя правило умножения многочлена на многочлен и учитывая, что $\bar{i}\bar{j} = 0$, $\bar{j}\bar{k} = 0$, $\bar{k}\bar{i} = 0$, $\bar{i}\bar{i} = 1$, $\bar{j}\bar{j} = 1$, $\bar{k}\bar{k} = 1$ (орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ взаимно перпендикулярны), получаем

$$\bar{a}\bar{b} = XX_1 + YY_1 + ZZ_1. \tag{12}$$

Если $\bar{a} = \bar{b}$, то

$$a^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \tag{13}$$

т. е. квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций.

Из равенства (13) находим длину вектора $\bar{a}$:

$$a = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{14}$$

Пользуясь равенством (14), легко получить формулу определения расстояния между двумя точками $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Нам уже известно, что $\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$, следовательно, длина

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{15}$$

Воспользовавшись формулами (9), (12), (14), выразим косинус угла φ между двумя векторами $\bar{a}\ \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\bar{b}\ \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ через их координаты:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{16}$$

Пусть дан вектор $\bar{a} = \{X;\ Y;\ Z\}$. Обозначим углы от векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ до вектора $\bar{a}$ соответственно через α, β, γ. Пользуясь формулой (16) и учитывая, что $\bar{i} = \{1;\ 0;\ 0\}$, $\bar{j} = \{0;\ 1;\ 0\}$, $\bar{k} = \{0;\ 0;\ 1\}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{i}, \bar{a}}) = \cos\alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{j}, \bar{a}}) = \cos\beta &= \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{k}, \bar{a}}) = \cos\gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$. В частности, если начало вектора $\bar{r}$ совпадает с началом координат, то направляющие косинусы радиус-вектора $\bar{r}$ выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где x, y, z — координаты конца радиус-вектора $\bar{r}$ (см. рис. 41).

Из полученных равенств (17) следует, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{19}$$

Из формулы (16) также следует, что если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{20}$$

Условие коллинеарности векторов $\bar{a}\ \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\bar{b}\ \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ нам уже известно (см. п. 4—5):

$$\bar{a} = \bar{b}\lambda,$$

отсюда легко получить условие коллинеарности через координаты векторов:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}. \qquad (21)$$

Если $\lambda > 0$, то векторы имеют одинаковое направление, если $\lambda < 0$, то направления противоположные.

303. Вектор $\bar{a} = \overline{AB}$, длина которого $a = 5$, образует с осью Ox (с вектором $\overline{OE} = \bar{e}$) угол 60°. Найти проекцию этого вектора на данную ось (рис. 43).

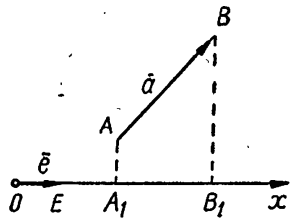


Рис. 43

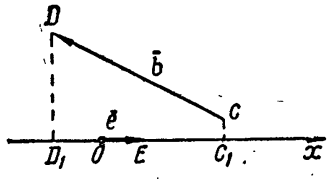


Рис. 44

Решение. $\text{пр}_{Ox}\bar{a} = \text{пр}_{\bar{e}}\bar{a} = a\cos\varphi = 5\cos 60° = 5\cdot\frac{1}{2} = 2{,}5.$

304. Вектор $\bar{b} = \overline{CD}$ образует с осью Ox, которая задана единичным вектором $\bar{e}$, угол 120°. Длина вектора $\bar{b}$ равна 4. Найти проекцию этого вектора на ось Ox (рис. 44).

Решение. $\text{пр}_{Ox}\bar{b} = b\cos\varphi = 4\cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$

305. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ точка M имеет координаты $x = -2$, $y = 5$, $z = 0$. Найти координаты ее радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM}$.

Решение. Абсцисса $X = x = -2$, ордината $Y = y = 5$, аппликата $Z = z = 0$. Следовательно, $\bar{r} = \{-2;\ 5;\ 0\}$.

Радиус-вектор $\bar{r}$ лежит в плоскости xOy.

306. Найти координаты X, Y, Z суммы векторов $\bar{a}$ $\{2;\ -3;\ 4\}$, $\bar{b}$ $\{-5;\ 1;\ 6\}$, $\bar{c} = \{3;\ 0;\ -2\}$.

Решение. $X = 2 - 5 + 3 = 0$; $Y = -3 + 1 + 0 = -2$; $Z = 4 + 6 - 2 = 8$.

Следовательно, сумма векторов $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \{0;\ -2;\ 8\}$. Искомый вектор параллелен плоскости yOz, так как его компонента по оси Ox равна нулю.

307. Найти сумму векторов $\bar{a}_1 = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{a}_2 = 3\bar{k} - \bar{i}$, $\bar{a}_3 = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$.

Решение. $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3=2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}+3\bar{k}-\bar{i}-\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}=4\bar{j}$. Обозначим сумму векторов $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3$ через $\bar{a}$ и полученный результат запишем так:

$$\bar{a}\{0;\ 4;\ 0\} \text{ или } \bar{a}=\{0;\ 4;\ 0\}.$$

Вектор $\bar{a}$ коллинеарен с осью Oy.

308. По данным векторам $\bar{a}\{3;\ -4;\ 5\}$ и $\bar{b}\{-1;\ 0;\ -2\}$ найти координаты вектора $\bar{c}=2\bar{a}+5\bar{b}$.

Решение. $\bar{c}=2\bar{a}+5\bar{b}=2(3\bar{i}-4\bar{j}+5\bar{k})+5(-\bar{i}-2\bar{k})=\bar{i}-8\bar{j}$. Координаты вектора $\bar{c}$: $X=1$, $Y=-8$, $Z=0$, а его компоненты $\bar{i}$, $-8\bar{j}$, 0.

309. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если A (1; -3; 4) и B (-3; 2; 1).

Решение. $X=x_2-x_1=-3-1=-4$, $Y=y_2-y_1=2-(-3)=5$, $Z=z_2-z_1=1-4=-3$. Следовательно, $\overline{AB}=\{-4;\ 5;\ -3\}$.

310. Найти расстояние между точками A (3; -4; -1) и B (-1; 2; -3).

Решение. Воспользовавшись формулой (15), получим

$$d=|\overline{AB}|=\sqrt{(-1-3)^2+(2+4)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{56}\approx 7{,}48.$$

311. Длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны $a=8$, $b=5$ и угол между векторами $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=150°$. Найти скалярные квадраты векторов и их скалярное произведение.

Решение. Воспользовавшись формулами (8) и (10), получим скалярное произведение векторов

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=8\cdot 5\cos 150°=40\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-20\sqrt{3};$$

скалярные квадраты векторов

$$(\bar{a})^2=a^2=64,\ (\bar{b})^2=b^2=25.$$

312. Найти скалярный квадрат вектора $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$ и его длину.

Решение. Воспользуемся формулами (10), (13) и (14):

$$(\bar{a})^2=a^2=2^2+(-1)^2+(-2)^2=9,$$

отсюда $a=3$.

313. Найти скалярное произведение векторов

$$\bar{p}=\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k},\ \bar{q}=\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}.$$

Решение. Скалярное произведение векторов найдем по формуле (12):

$$\bar{p}\bar{q}=1\cdot 1+(-3)\ 1+1\ (-4)=-6.$$

314. Найти угол φ между двумя векторами $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$.

Решение. Воспользуемся формулой (16):

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab} = \frac{1-2-8}{\sqrt{1+1+16}\sqrt{1+4+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

отсюда $\varphi = 135°$.

315. Выразить через орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ орт $\bar{a}^0$ вектора

$$\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}.$$

Решение. Известно, что орт вектора $\bar{a}$ равен отношению этого вектора к его модулю (см. п. 4 § 2), т. е.

$$\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{a} = \frac{3\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}}{\sqrt{9+16+36}} = \frac{3}{7}\bar{i} - \frac{4}{7}\bar{j} + \frac{6}{7}\bar{k}.$$

316. Найти проекцию вектора $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$ на направление вектора $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j}$.

Решение. Известно, что

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = a\cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}}).$$

Косинус угла между векторами $\bar{b}$ и $\bar{a}$ найдем по формуле (16):

$$\cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}}) = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 1 + (-1)\cdot 0}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{52}}.$$

Следовательно,

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \sqrt{26}\cdot\frac{7}{\sqrt{52}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Эту задачу можно решить короче, если учесть, что

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = a\cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{b}.$$

Пользуясь этой формулой, получим

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{(3\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k})(\bar{i} + \bar{j})}{\sqrt{2}} = \frac{3+4}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

317. Найти длины векторов $\bar{a}\{2; 5; -1\}$, $\bar{b}\{1; -1; -3\}$ и скалярное произведение этих векторов.

Решение. Длины векторов найдем по формуле (14):

$a = \sqrt{2^2+5^2+(-1)^2} = \sqrt{30}$, $b = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{11}$;

скалярное произведение

$$\bar{a}\bar{b} = 2\cdot 1 + 5\,(-1) + (-1)\,(-3) = 0.$$

Следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны.

318. Найти углы, образуемые вектором $\bar{a}\{-2;\ 2;\ 1\}$ с осями координат.

Решение. Воспользовавшись формулами (17), получим:

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}} = -\frac{2}{3},\quad \cos\beta = \frac{2}{3},\quad \cos\gamma = \frac{1}{3},$$

отсюда $\alpha \approx 131°49'$, $\beta \approx 48°11'$, $\gamma \approx 70°32'$.

319. Вершины треугольника заданы радиус-векторами $\bar{a} = \{1;\ 2\}$, $\bar{b} = \{2;\ 5\}$, $\bar{c} = \{3;\ 4\}$. Определить стороны и внутренние углы треугольника.

Решение. Из условия задачи следует, что вершины треугольника $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 5)$, $C(3;\ 4)$.

Следовательно, векторы, совпадающие со сторонами треугольника: $\overline{AB} = \{1;\ 3\}$, $\overline{AC} = \{2;\ 2\}$, $\overline{BC} = \{1;\ -1\}$ (рис. 45). Найдем длины сторон треугольника: $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $AC = |\overline{AC}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $BC = |\overline{BC}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Нетрудно видеть, что

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Следовательно, треугольник ABC прямоугольный, гипотенуза его есть сторона AB, угол C прямой. Для определения косинуса угла A воспользуемся формулой (16):

$$\cos A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{1\cdot 2+3\cdot 2}{\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}8996.$$

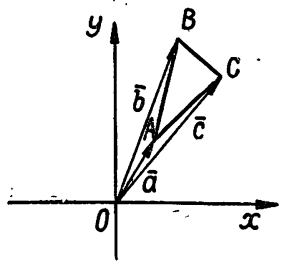


Рис. 45

По таблицам тригонометрических функций находим $A \approx 25°54'$.

Так как треугольник прямоугольный, то угол $B = 90° - A \approx 90° - 25°54' = 64°6'$.

320. Написать выражения компонент вектора $\{2;\ 0;\ -3\}$ по осям координат.

321. Написать разложение вектора $\bar{a}\{0;\ -2;\ 3\}$ по координатным ортам.

322. Каковы координаты и компоненты векторов:

1) $2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$; 2) $\bar{i} + 4\bar{k}$; 3) $2\bar{k} - \bar{j}$?

323. Даны векторы $\bar{a}\{2;\ 0;\ 3\}$ и $\bar{b}\{-3;\ 4;\ -5\}$. Найти векторы $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{a}-\bar{b}$, $3\bar{a}-4\bar{b}$.

324. Даны векторы $\bar{a}\{1;\ 2;\ 0\}$, $\bar{b}\{1;\ 2;\ 3\}$, $\bar{c}\{2;\ 3;\ 2\}$. Найти векторы $\bar{p} = 2\bar{a} + 4(\bar{b}-\bar{c})$, $\bar{q} = 2\bar{a} - 3[\bar{b} + 2(\bar{c}-\bar{a})] + 2\bar{b} + 3\bar{c}$.

325. Какие из векторов $\bar{a}\{1;\ 2;\ 3\}$, $\bar{b}\{0;\ 1;\ 1\}$, $\bar{c}\{1;\ 0;\ 2\}$, $\bar{d}\{1;\ 2;\ 0\}$, $\bar{p}\{0;\ 0;\ 4\}$, $\bar{q}\{0;\ 3;\ 0\}$, $\bar{m}\{-2;\ 0;\ 0\}$ коллинеарны

с осью абсцисс? с осью ординат? с осью аппликат? Какие из этих векторов параллельны плоскости xOy? плоскости yOz? плоскости xOz?

326. Вектор $\bar{a}$, длина которого равна 8 единицам масштаба, параллелен плоскости xOy; угол α между осью Ox и вектором $\bar{a}$ составляет 120°; угол β между осью Oy и вектором $\bar{a}$ составляет 30°. Найти координаты и компоненты вектора $\bar{a}$.

327. Определить точку B, которая является концом вектора $\bar{a}\{3; -4; 2\}$, если его начало совпадает с точкой $A(2; -1; 1)$.

328. Записать в векторной форме отрезок, соединяющий две точки $A(-2; 0; 5)$ и $B(2; 3; 4)$.

329. Найти начало C вектора $\bar{b}\{4; 6; 5\}$, если его конец совпадает с точкой $D(-2; 0; 3)$.

330. Даны точки $A(2; -3; 1)$, $B(-2; 2; -4)$, $C(3; -1; 5)$. Найти координаты, компоненты и длины векторов $\overline{AB}$, $\overline{BA}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

331. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если да, то равнонаправлены ли они и каково отношение их длин:

1) $\bar{a}\{4; 5; -2\}$, $\bar{b}\{4; 5; 2\}$;
2) $\bar{a}\{2; -1; 1\}$, $\bar{b}\{4; 2; -2\}$;
3) $\bar{a}\{4; 3; -2\}$, $\bar{b}\{8; 6; -4\}$;
4) $\bar{a}\{-4; 2; 0\}$, $\bar{b}\{2; -1; 0\}$;
5) $\bar{a}\{3; 0; 2\}$, $\bar{b}\{3; 2; 0\}$;
6) $\bar{a}\{2; 4; 6\}$, $\bar{b}\{3; 6; 9\}$.

332. Перпендикулярны ли векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$, если

1) $\bar{p}\{2; 0; -3\}$, $\bar{q}\{3; 4; 2\}$;
2) $\bar{p}\{0; 4; 1\}$, $\bar{q}\{1; -2; 8\}$;
3) $\bar{p}\{3; 0; -2\}$, $\bar{q}\{-2; 3; 0\}$;
4) $\bar{p}\{1; -1; 2\}$, $\bar{q}\{2; -2; 1\}$.

333. Даны вершины $A(0; 0; 0)$, $B(2; -3; 5)$, $C(-3; 4; -2)$ параллелограмма $ABCD$. Найти вершину D.

334. Проверить, являются ли точки $A(-2; 3; 4)$, $B(2; -4; 5)$, $C(-1; 2; -3)$, $D(7; -12; -1)$ вершинами трапеции.

335. Найти углы между осями координат и вектором

$$\bar{a}\{-3; 0; 1\}.$$

336. Найти углы между осями координат и радиус-вектором точки $M(-2; 3; 1)$.

337. Вектор $\bar{a}$ образует с осью абсцисс и осью ординат углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$. Найти угол между вектором $\bar{a}$ и осью аппликат.

338. Длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ равны $a=5$, $b=6$ и угол между векторами $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})=120°$. Найти скалярные квадраты векторов и их скалярное произведение.

339. Найти скалярный квадрат вектора $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$ и его длину.

340. Найти скалярный квадрат вектора $\bar{a}\{-1; 3; -2\}$.

341. Найти скалярное произведение векторов $\bar{p}\{3; 2; -1\}$, $\bar{q}\{-1; 0; 4\}$.

342. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$.

343. Найти косинус угла между векторами $\bar{p}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{q}=2\bar{j}-\bar{i}+\bar{k}$.

344. Найти угол между векторами $\{-1; 0; 1\}$, $\{1; -2; -2\}$.

345. Найти проекцию вектора $\bar{b}=2\bar{j}-\bar{i}$ на направление вектора $\bar{c}=3\bar{i}-4\bar{j}$.

346. Найти проекцию вектора $\bar{m}=2\bar{i}-4\bar{j}+\bar{k}$ на направление вектора $\bar{n}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

347. Найти вектор $\bar{a}=\{X; Y; Z\}$, зная его две координаты $Y=2$, $Z=-3$ и модуль $a=\sqrt{38}$.

348. Выразить через орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ орт $\bar{a}^0$ вектора $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

349. Та же задача для вектора $\bar{b}=\bar{i}+\frac{1}{2}\bar{j}-\bar{k}$.

350. Даны векторы $\bar{a}\{4; -4; -2\}$, $\bar{b}\{-1; 2; 2\}$, $\bar{c}\{3; 0; -4\}$. Найти их единичные векторы (орты).

351. Зная векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overline{AB}=\{1; 2; -1\}$ и $\overline{BC}=\{2; 0; -4\}$, найти внутренние углы треугольника.

352. В треугольнике ABC, вершины которого лежат в точках $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$, найти: 1) внутренние углы; 2) длины сторон; 3) острый угол между медианой BD и стороной AC.

§ 3. Понятие об уравнении поверхности. Уравнение линии в пространстве

1. В аналитической геометрии поверхность рассматривают как геометрическое место точек.

Уравнением поверхности называется такое уравнение между переменными x, y, z, которому удовлетворяют координаты лю-

бой точки этой поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей ей.

Может случиться, что поверхность состоит из совокупности конечного числа точек, например поверхность, определяемая уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты единственной точки $M(a; b; c)$, т. е. поверхность состоит из одной точки. Может случиться, что вовсе не существует точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению $F(x, y, z)=0$. Например, $x^2+y^2+z^2+1=0$.

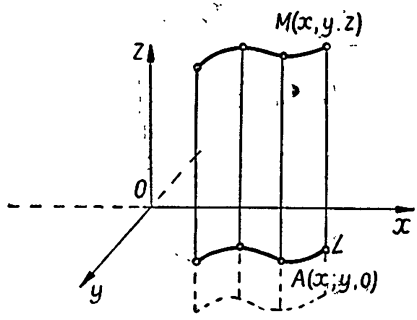


Рис. 46

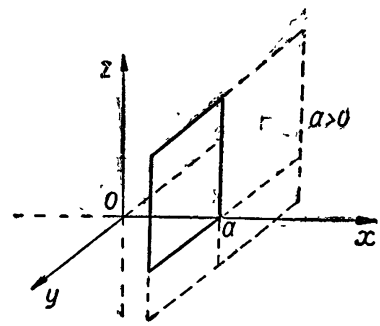


Рис. 47

В этом случае можно указать бесконечное множество троек чисел x, y, z, в каждой из которых по крайней мере есть одно комплексное число, удовлетворяющее данному уравнению. Такие тройки чисел называют *мнимыми точками*, а поверхность, состоящую из совокупности мнимых точек, также называют *мнимой*. Следовательно, уравнение $F(x, y, z)=0$ всегда определяет поверхность действительную или мнимую.

Если уравнение поверхности $F(x, y, z)=0$ есть полином (многочлен) n-й степени относительно переменных x, y, z (определение степени многочлена см. на стр. 34), то поверхность называется *алгебраической поверхностью n-го порядка*. Неалгебраические поверхности называются *трансцендентными*.

Если уравнение $F(x, y)=0$ с двумя переменными, то оно, как уже известно, в плоскости xOy определяет некоторую линию L (рис. 46), а в пространстве это же уравнение определяет поверхность S. В самом деле, пусть координаты точки $A(x; y; 0)$ удовлетворяют уравнению $F(x, y)=0$, тогда координаты любой точки $M(x; y; z)$, расположенной на прямой, проходящей через точку A и параллельной оси Oz, также удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, уравнение $F(x, y)=0$ определяет цилиндрическую поверхность, направляющая которой есть

линия L, а образующие параллельны оси Oz. Аналогично уравнение $\varphi(x, z) = 0$ ($\psi(y, z) = 0$) также является уравнением цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oy (оси Ox).

Если уравнение имеет вид $x = a$, то в плоскости xOy оно определяет прямую, параллельную оси Oy (рис. 47), а в пространстве — плоскость, параллельную координатной плоскости yOz и проходящую от нее на расстоянии, равном a единиц. Уравнение $y = b$ ($z = c$) есть уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости xOz (xOy). Возникают две задачи: 1) дана поверхность как геометрическое место точек; требуется составить ее уравнение; 2) дано уравнение поверхности; требуется исследовать форму поверхности, соответствующей этому уравнению.

2. Линия в пространстве определяется как пересечение двух поверхностей. Пусть поверхности S_1 и S_2 изображаются соответственно уравнениями $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$.

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

определяет линию, т. е. геометрическое место точек, координаты которых одновременно удовлетворяют обоим уравнениям. Например, уравнения оси Oz будут $x = 0$, $y = 0$ ($x = 0$ — уравнение плоскости yOz, $y = 0$ — уравнение плоскости xOz, пересечение этих плоскостей дает прямую Oz).

353. Определить, какие геометрические образы даны уравнениями:

1) $x^2 + y^2 = R^2$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
3) $xy = m$; 4) $z - x^2 = 0$.

Решение. 1) Уравнение определяет прямой круговой цилиндр с радиусом R и осью Oz. 2) Уравнение изображает сферическую поверхность с центром, совпадающим с началом координат и радиусом R. 3) Уравнение изображает цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть гипербола, лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (гиперболический цилиндр). 4) Уравнение $z = x^2$ в плоскости xOz определяет параболу, расположенную симметрично относительно оси Oz, вершина которой совпадает с началом координат O. В пространстве это же уравнение определяет цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть парабола, лежащая в плоскости xOz, а образующие параллельны оси Oy (параболический цилиндр). Заметим, что каждое из уравнений 1—4 есть алгебраическое уравнение второго порядка, следовательно,

каждая из поверхностей 1—4 есть алгебраическая поверхность второго порядка.

354. Проверить, лежат ли точки $A\left(0;\ 1;\ \frac{1}{3}\right)$, $B\ (1;\ 2;\ 4)$, $C\ (1;\ 1;\ 2)$ на поверхности, заданной уравнением

$$y^3 + 2xy - 3z = 0.$$

Решение. Точки A и B лежат на данной поверхности, так как координаты их удовлетворяют уравнению. Убедимся в этом. Подставив в уравнение значения $x = 0$, $y = 1$, $z = \frac{1}{3}$, найдем $1^3 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Если подставим значения $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$, то получим $2^3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 0$. Точка C не лежит на поверхности, так как $1^3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \neq 0$.

Данное уравнение поверхности есть алгебраическое уравнение 3-го порядка, следовательно, и поверхность называется *алгебраической поверхностью 3-го порядка.*

355. Найти уравнение сферы с центром в точке $C\ (a;\ b;\ c)$ и радиусом R.

Решение. По определению, *сферой* называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от одной данной точки, называемой центром. Следовательно, расстояние любой точки $M\ (x;\ y;\ z)$, лежащей на сфере, от центра $C\ (a;\ b;\ c)$ равно R, т. е.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R,$$

отсюда

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Это есть искомое уравнение сферы. Если центр сферы совпадает с началом координат, то $a = b = c = 0$ и уравнение сферы будет иметь вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (2)$$

356. Найти центр и радиус сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6 = 0.$$

Решение. Данное уравнение приведем к уравнению вида (1)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) + z^2 - 1 - 9 - 6 = (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 - 16 = 0$$

или

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 16,$$

отсюда

$$a = 1,\ b = -3,\ c = 0,\ R^2 = 16,$$

т. е. центр сферы находится в точке $C\ (1;\ -3;\ 0)$ и радиус ее $R = 4$.

357. Определить, какие геометрические образы даны уравнениями:

1) $x^2+y^2+z^2=1$; 2) $x^2+y^2-2x-3=0$;
3) $y^2=1$; 4) $y^2-x^2=0$;
5) $x^2+y^2+z^2=0$; 6) $x^2+y^2=0$;
7) $y^2=2x$.

358. Проверить, лежат ли точки $A(0;\ 0;\ 3)$, $B\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{1}{2};\ -4\right)$, $C\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$, $D\left(-\frac{\pi}{6};\ -\frac{1}{2};\ 1\right)$, $E\left(\frac{\pi}{2};\ 2;\ 0\right)$, $F\left(\frac{\pi}{2};\ -1;\ 3\right)$ на цилиндрической поверхности $y=\sin x$.

359. Определить расположение точек $A(2;\ 1;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ -1)$, $C(2;\ 3;\ -1)$, $D(1;\ 0;\ -1)$, $E(-2;\ 2;\ 1)$ относительно сферы

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4.$$

360. Определить, какие геометрические образы даны уравнениями:

1) $z=y$; 2) $y=0$;
3) $xyz=0$; 4) $x^2+y^2+1=0$;
5) $z^2=16$; 6) $z=0$;
7) $(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=0$.

361. Проверить, лежат ли точки $A(-1;\ 0;\ 1)$, $B(0;\ -2;\ 2)$, $C(0;\ 0;\ 0)$, $D(1;\ 2;\ 1)$ на поверхности

$$z=x^2+\frac{y^2}{2}.$$

362. Составить уравнение сферы, радиус которой равен 3, с центром в точке $C(1;\ -2;\ 3)$.

363. Найти координаты центра C и радиус R каждой из следующих сфер:

1) $x^2+y^2+z^2-4x+2y=0$;
2) $x^2+y^2+z^2+2x-6=0$;
3) $x^2+y^2+z^2-8z=0$.

364. Составить уравнение сферы с центром в точке $C(1;\ 2;\ -3)$, проходящей через начало координат.

365. Какую поверхность изображает уравнение $x^2+y^2+4x=0$?

366. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $A(0;\ 1;\ 0)$ и $B(0;\ 0;\ 1)$.

367. Определить, какой геометрический образ представляет система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x=0, \\ y=1. \end{cases}$$

Решение. Решая данную систему уравнений, получаем кривую $x^2+z^2-4x+1=0$, т. е. окружность $(x-2)^2+z^2=3$, лежащую в плоскости $y=1$, с радиусом $R=\sqrt{3}$ и с центром в точке $(2;\ 1;\ 0)$.

368. Определить, какой геометрический образ представляет каждая из систем уравнений:

1) $y = 0,\ z = 0$; 2) $y - a = 0;\ z + 2b = 0$;
3) $x = a,\ z = 0$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ y = 3$;
5) $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ y = 5$; 6) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az,\ 2x = a$.

369. Найти пересечение шаровой поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ с цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 9$.

§ 4. Общее уравнение плоскости. Нормальное уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Пересечение плоскостей. Расстояние от точки до плоскости

1. Всякое уравнение первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

определяет плоскость и, обратно, всякая плоскость определяется уравнением первой степени. Уравнение (1) называется *общим уравнением плоскости.*

Составим уравнение плоскости Q (рис. 48), заданной вектором нормали $\bar{n}\{A; B; C\}$ (т. е. вектором, перпендикулярным к плоскости) и какой-нибудь ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$. На плоскости Q возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$.

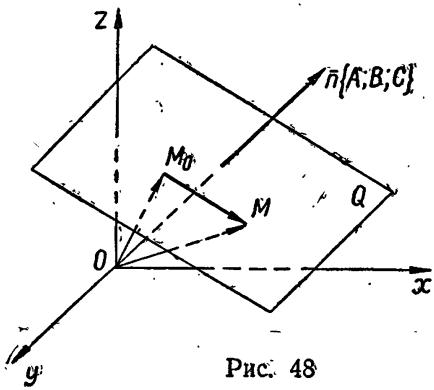


Рис. 48

Вектор $\overline{M_0M}$ лежит в плоскости Q, следовательно, векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны, т. е.

$$\overline{M_0M}\ \bar{n} = 0. \qquad (2)$$

Обозначим $\overline{OM_0} = \bar{r}_0$, $\overline{OM} = \bar{r}$, тогда $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$. Учитывая равенство (2), получаем

$$\bar{n}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0 \qquad (3)$$

или в координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4)$$

Итак, каждое из уравнений — уравнение (3) в векторной форме, а уравнение (4) в координатной форме — выражает уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\bar{n}\{A; B; C\}$ и проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Если обозначить через D выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то из уравнения (4) получим уравнение (1).

Уравнение (1) можно записать в векторной форме:

$$\bar{n}\bar{r} + D = 0,$$

где $\bar{n} = \{A;\ B;\ C\}$; $\bar{r} = \{x;\ y;\ z\}$ — текущий радиус-вектор.

Рассмотрим особые случаи уравнения (1).

I. Пусть свободный член $D = 0$, тогда получим уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz = 0,$$

проходящей через начало координат.

II. Пусть один из коэффициентов A, B, C равен нулю, $D \neq 0$:

а) $A = 0$ (т. е. проекция вектора $\bar{n}$ на ось Ox равна нулю), тогда $By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Ox;

б) $B = 0$, тогда $Ax + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Oy;

в) $C = 0$, тогда $Ax + By + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Oz.

III. Пусть один из коэффициентов A, B, C равен нулю и $D = 0$:

а) $A = D = 0$, $By + Cz = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через ось Ox;

б) $B = D = 0$, $Ax + Cz = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через ось Oy;

в) $C = D = 0$, $Ax + By = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через ось Oz.

IV. Пусть два из коэффициентов A, B, C равны нулю, $D \neq 0$:

а) $A = B = 0$, тогда $Cz + D = 0$ или, что то же, $z = -\frac{D}{C} = c$ — уравнение плоскости, параллельной плоскости xOy;

б) $A = C = 0$, тогда $By + D = 0$ или $y = -\frac{D}{B} = b$ — уравнение плоскости, параллельной плоскости xOz;

в) $B = C = 0$, тогда $Ax + D = 0$ или $x = -\frac{D}{A} = a$ — уравнение плоскости, параллельной плоскости yOz.

V. Пусть:

а) $A = B = D = 0$, тогда $Cz = 0$ или $z = 0$ — уравнение плоскости xOy;

б) $A = C = D = 0$, тогда $By = 0$ или $y = 0$ уравнение плоскости xOz;

в) $B = C = D = 0$, тогда $Ax = 0$ или $x = 0$ — уравнение плоскости yOz.

2. *Нормальное уравнение плоскости* в координатной форме имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{5}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы перпендикуляра (нормали), опущенного из начала координат на плоскость; $p \geqslant 0$ — его длина.

Уравнение (5) напишем в векторной форме:

$$\bar{n}^0\bar{r} - p = 0, \tag{6}$$

где $\bar{n}^0 = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ — единичный вектор, перпендикулярный к данной плоскости и обращенный от начала O к плоскости; $\bar{r} = \{x;\ y;\ z\}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$, лежащей на плоскости.

3. Пусть в уравнении (1) свободный член $D \neq 0$. Разделим обе части уравнения (1) на $-D$ и положим $-\frac{A}{D} = \frac{1}{a}$; $-\frac{B}{D} = \frac{1}{b}$; $-\frac{C}{D} = \frac{1}{c}$.

Полученное таким образом уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{7}$$

называется *уравнением плоскости в отрезках.*

4. Угол φ между двумя плоскостями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

равен углу между перпендикулярными к ним векторами $\bar{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$;

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}) = \frac{\bar{n}_1\bar{n}_2}{n_1n_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{9}$$

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{10}$$

Условие (10) есть условие перпендикулярности двух плоскостей (8).

Условие параллельности двух плоскостей (8)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{11}$$

получается из условия параллельности двух векторов $\bar{n}_1\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\bar{n}_2\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$.

Если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}, \tag{12}$$

то уравнения (8) равносильны, т. е. плоскости совпадают.

Если условие (11) не выполняется, то плоскости (8) пересекаются.

5. Чтобы привести общее уравнение плоскости (1) к нормальному виду (5), надо его умножить на нормирующий множитель

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{13}$$

т. е. уравнение (1) привести к такому виду:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

Направляющие косинусы нормали и параметр p определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Знак нормирующего множителя берется противоположным знаку свободного члена D уравнения (1). Если $D=0$, то знак произволен.

Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости (5) определяется по формуле

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p| \tag{15}$$

и до плоскости (1) по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{15'}$$

Если в формулах (15) и (15') отбросить знак абсолютной величины, то при вычислениях ($p \neq 0$ и $D \neq 0$) будем получать δ со знаком плюс в том случае, когда начало координат и данная точка находятся по разные стороны от плоскости, и со знаком минус, когда они находятся по одну сторону от плоскости.

В первом случае $d = \delta$, во втором $d = -\delta$. В обоих случаях $d = |\delta|$.

Формулу (15) можно написать в векторной форме:

$$d = |\bar{n}^0\bar{r}_1 - p|,$$

где $\bar{n}^0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$; радиус-вектор $\bar{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$ точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$.

370. Построить плоскости, заданные уравнениями:
1) $3x+2y+4z-8$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $2z-3=0$;
4) $2x-3y=0$; 5) $2x-y+3z=0$.

Построение. 1) Из данного уравнения видно, что плоскость не проходит через начало координат ($D \neq 1$) и пересекает в различных точках все три оси координат. В аналогичных задачах для построения плоскости по ее уравнению целесообразно найти эти три точки на осях, которые будут определять положение плоскости. Сначала найдем точку пересечения плоскости с осью Ox, для этого положим в данном

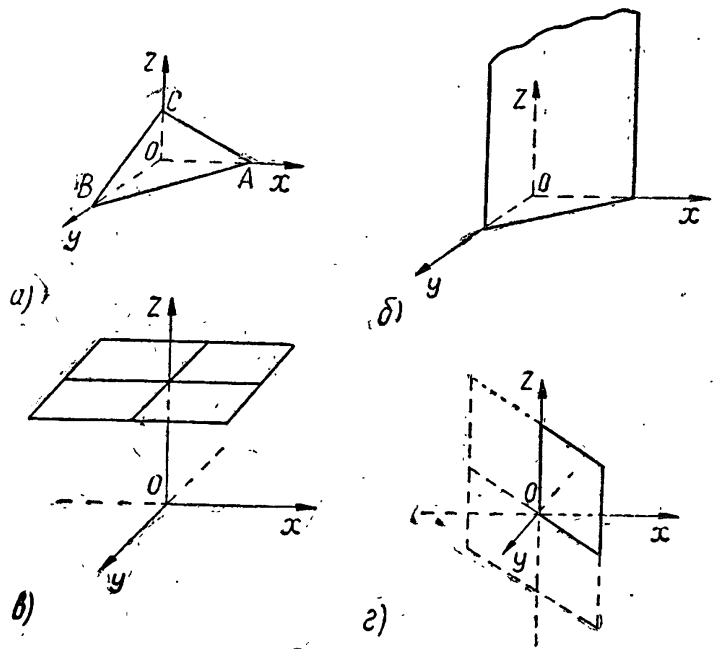


Рис. 49

уравнении $y = z = 0$, тогда $3x - 8 = 0$, $x = a = \frac{8}{3}$. Аналогично, если $x = z = 0$, то $y = b = 4$, т. е. получим координаты точки пересечения с осью Oy, если $x = y = 0$, то $z = c = 2$, т. е. нашли координаты точки пересечения с осью Oz.

Отрезки a, b, c можно найти другим способом. Учитывая, что $D = -8 \neq 0$, приведем общее уравнение плоскости к уравнению плоскости в отрезках

$$\frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1,$$

отсюда $a = \frac{8}{3}$, $b = 4$, $c = 2$.

Плоскость, проведенная через найденные точки $A\left(\frac{8}{3}; 0; 0\right)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 2)$ будет искомой (рис. 49, $а$). Теперь можно

найти линии пересечения (следы) плоскости с координатными плоскостями. Для этого соединим найденные точки A, B, C прямыми, которые и будут следами. Положение плоскости определяется также двумя несовпадающими прямыми, принадлежащими плоскости. Поэтому, если найти хотя бы два несовпадающих следа плоскости, то они определят ее положение.

2) Так как $D = -6 \neq 0$, то данное уравнение можно написать в таком виде:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Отсюда $a = 3$, $b = 2$. Отложив эти отрезки на координатных осях и соединив их концы, получим след плоскости в плоскости xOy (рис. 49, *б*). Данная плоскость параллельна оси Oz, следовательно, ее следы в координатных плоскостях xOz и yOz параллельны оси Oz.

3) Так как $A = B = 0$, то данная плоскость параллельна координатной плоскости xOy и отсекает на оси Oz отрезок $z = c = \frac{3}{2}$. Следы плоскости на координатных плоскостях xOz и yOz параллельны соответственно осям Ox и Oy (рис. 49, *в*).

4) В данном уравнении $C = D = 0$, следовательно, плоскость проходит через ось Oz. Следы плоскости в координатных плоскостях xOz и yOz совпадают с осью Oz, а в плоскости xOy ее следом будет прямая, уравнение которой $2x - 3y = 0$ или $y = \frac{2}{3}x$ (рис. 49, *г*).

5) Плоскость проходит через начало координат ($D = 0$), следовательно, $a = b = c = 0$. Найдем следы ее в координатных плоскостях. Пусть $x = 0$, тогда $3z - y = 0$ или $z = \frac{1}{3}y$; если $y = 0$, то $2x + 3z = 0$ и $z = -\frac{2}{3}x$; если $z = 0$, то $2x - y = 0$ и $y = 2x$. Теперь в плоскостях yOz ($x = 0$), xOz ($y = 0$), xOy ($z = 0$) построим следы плоскости, т. е. прямые, соответствующие полученным уравнениям.

371. Составить уравнение плоскости Q, отсекающей на оси Ox отрезок $OA = 3$ и перпендикулярной к вектору $\overline{n}\{2; -3; 1\}$.

Решение. По условию задачи точка A лежит на плоскости с координатами $x = 3$, $y = 0$, $z = 0$. Воспользовавшись формулой (4), получим уравнение искомой плоскости

$$2(x - 3) - 3y + z = 0$$

или

$$2x - 3y + z = 6.$$

372. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 2; -1)$ и перпендикулярной к вектору $\overline{n}\{3; 0; 2\}$.

Решение. Применив формулу (4), получим

$$3(x-1)+0(y-2)+2(z+1)=0$$

или

$$3x+2z-1=0.$$

Искомое уравнение плоскости не содержит y, т. е. является уравнением плоскости, параллельной оси Oy.

373. Найти уравнение плоскости: 1) проходящей через ось Ox и точку $(1;\ 2;\ -3)$; 2) параллельной оси Oz и проходящей через точки $(1;\ 0;\ 1)$ и $(-2;\ 1;\ 3)$.

Решение. 1) Каждая плоскость, проходящая через ось Ox, определяется уравнением вида

$$By+Cz=0.$$

Потребуем, чтобы плоскость проходила через точку $(1;\ 2;\ -3)$:

$$2B-3C=0 \text{ или } B=\frac{3C}{2}.$$

Следовательно, искомое уравнение плоскости будет иметь вид

$$\frac{3C}{2}y+Cz=0$$

или

$$\frac{3}{2}y+z=0,$$

или

$$3y+2z=0.$$

2) Каждая плоскость, параллельная оси Oz, определяется уравнением вида

$$Ax+By+D=0.$$

Так как искомая плоскость проходит через точки $(1;\ 0;\ 1)$ и $(-2;\ 1;\ 3)$, то

$$\begin{cases} A+B\cdot 0+D=0, \\ -2A+B+D=0. \end{cases}$$

Отсюда $D=-A$, $B=3A$, следовательно, искомое уравнение плоскости

$$Ax+3Ay-A=0$$

или

$$x+3y-1=0.$$

374. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;\ 2;\ 0)$, $N(1;\ -1;\ 2)$, $P(0;\ 1;\ -1)$ и найти углы ее нормали с осями координат.

Решение. Известно, что положение плоскости определяется тремя точками (не лежащими на одной прямой). Напишем уравнение любой плоскости, проходящей через точку $M(1;\ 2;\ 0)$:

$$A(x-1)+B(y-2)+Cz=0. \qquad (A)$$

Чтобы получить искомое уравнение плоскости, надо потребовать, чтобы уравнению (A) удовлетворяли координаты точек N и P:

$$\begin{cases} -3B+2C=0, \\ -A-B-C=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3B-2C=0, \\ A+B+C=0. \end{cases}$$

Отсюда $B=\frac{2}{3}C$, $A=-C-B=-\frac{5}{3}C$. Подставив эти значения в уравнение (A), получим искомое уравнение плоскости:

$$-\frac{5}{3}C(x-1)+\frac{2}{3}C(y-2)+Cz=0$$

или

$$\frac{5}{3}(x-1)-\frac{2}{3}(y-2)-z=0,$$

или

$$5x-2y-3z-1=0.$$

Для определения углов, образованных вектором нормали $\bar{n}\{5;-2;-3\}$ искомой плоскости с осями координат, воспользуемся формулами (14):

$$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{25+4+9}}=\frac{5\sqrt{38}}{38}\approx 0{,}8111;$$

$$\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{38}}=-\frac{\sqrt{38}}{19}\approx -0{,}3244;$$

$$\cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{38}}=-\frac{3\sqrt{38}}{38}\approx -0{,}4866.$$

Отсюда $\alpha\approx 35°48'$, $\beta\approx 108°56'$, $\gamma\approx 119°7'$.

375. Найти расстояние:

1) от точки $(2;\ 3;\ -4)$ до плоскости

$$2x+6y-3z+16=0;$$

2) от точки $(2;\ -4;\ 1)$ до плоскости

$$x-8y+4z=0.$$

Решение. 1) Приведем уравнение к нормальному виду, умножив данное уравнение на нормирующий множитель

$$M=\frac{1}{-\sqrt{4+36+9}}=-\frac{1}{7}.$$

Получим

$$-\frac{2}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{3}{7}z-\frac{16}{7}=0$$

или

$$\frac{2x+6y-3z+16}{-7}=0.$$

Расстояние d найдем по формуле (15′):

$$d=\left|\frac{2\cdot 2+6\cdot 3-3(-4)+16}{-7}\right|=\left|-\frac{50}{7}\right|=7\frac{1}{7}.$$

По условию $D = 16 \neq 0$, а $\delta = -\frac{50}{7}$, следовательно, данная точка и начало координат находятся по одну сторону от плоскости.

2) $M = \frac{1}{\pm\sqrt{1+64+16}} = \pm\frac{1}{9}$ (знак можно взять любой, так как свободный член данного уравнения $D = 0$).

Приведем уравнение к нормальному виду, т. е. умножим его на нормирующий множитель M. Получим

$$\frac{x - 8y + 4z}{9} = 0.$$

Расстояние

$$d = \left|\frac{2 - 8(-4) + 4 \cdot 1}{9}\right| = 4\frac{2}{9}.$$

376. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $4x - 6y + 3z + 5 = 0$ и $2x - 3y + z - 5 = 0$;
2) $6x + 8y - 4z - 6 = 0$ и $3x + 4y - 2z + 3 = 0$;
3) $3x - 6y + 3z - 6 = 0$ и $-x + 2y - z + 2 = 0$;
4) $6x - 9z + 5 = 0$ и $2x - 3z + 1 = 0$.

Решение. 1) Условие параллельности (11) не выполнено, так как коэффициенты при текущих координатах не пропорциональны.

Проверим:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{2} = 2, \frac{B_1}{B_2} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{3}{1} = 3,$$

следовательно,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Данные плоскости пересекаются.

2) Условие параллельности (11) выполнено, т. е. коэффициенты при текущих координатах пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{3} = 2, \frac{B_1}{B_2} = \frac{8}{4} = 2, \frac{C_1}{C_2} = \frac{-4}{-2} = 2, \frac{D_1}{D_2} = \frac{-6}{3} = -2,$$

следовательно,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Это и означает, что плоскости параллельны.

3) Уравнения равносильны, так как все коэффициенты пропорциональны, а именно:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{-1} = -3, \frac{B_1}{B_2} = \frac{-6}{2} = -3, \frac{C_1}{C_2} = \frac{3}{-1} = -3,$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{-6}{2} = -3,$$

т. е.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

Умножив второе уравнение на коэффициент пропорциональности $\lambda=-3$, получим первое, следовательно, плоскости совпадают.

4) По условию

$$A_1=6,\ B_1=0,\ C_1=-9,\ D_1=5;$$
$$A_2=2,\ B_2=0,\ C_2=-3,\ D_2=1,$$

отсюда

$$\frac{6}{2}=\frac{0}{0}=\frac{-9}{-3}(=3). \qquad (A)$$

Коэффициент пропорциональности $\lambda=3$. Заметим, что соотношение (А) записано условно, тем не менее оно справедливо, если понимать его как совокупность следующих равенств:

$$6=2\cdot 3;\ 0=0\cdot 3;\ -9=(-3)\,3.$$

Следовательно, условие параллельности (11) выполнено, т. е. данные плоскости параллельны.

377. Установить, что плоскости $2x+3y-4z+1=0$ и $5x-2y+z+6=0$ взаимно перпендикулярны.

Решение. Условие перпендикулярности плоскостей (10) выполнено, так как

$$2\cdot 5+3(-2)+(-4)\cdot 1=0.$$

Следовательно, плоскости взаимно перпендикулярны.

378. Найти угол между плоскостями:

1) $x+2y-2z+1=0$ и $2x+6y+3z-2=0$;
2) $x-2y+3=0$ и $y+2z-5=0$.

Решение. 1) Воспользовавшись формулой (9), получим

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+2\cdot 6+(-2)\cdot 3}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+36+9}}=\frac{8}{21}\approx 0{,}3810,$$

отсюда

$$\varphi\approx 67^\circ 36'.$$

2) $$\cos\varphi=\frac{1\cdot 0+(-2)\,1+0\cdot 2}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{1+4}}=-0{,}4,$$

следовательно,

$$\varphi\approx 113^\circ 35'.$$

379. Проверить, лежат ли точки $A(1;\ 3;\ 6)$, $B(0;\ 0;\ -1)$, $C(1;\ 2;\ 1)$, $D(-1;\ 0;\ 1)$ на плоскости, заданной уравнением $2x-3y+z+1=0$.

380. Построить плоскости, заданные уравнениями:

1) $x+2y-z-4=0$; 2) $2y+3z-6=0$;
3) $2y-5=0$; 4) $2y-3z=0$;
5) $2x+3z=6$.

381. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

1) $2x+5z-1=0$; 2) $3x+y+1=0$;
3) $y-4z+1=0$; 4) $2x-y=0$;
5) $y-3z=0$; 6) $x+z=0$;
7) $y-5=0$; 8) $z+3=0$;
9) $8x-3=0$; 10) $x-y+z=0$.

382. Уравнение плоскости $2x-3y+4z-12=0$ написать в отрезках.

383. Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей:

1) $2x-y+2z+9=0$; 2) $x-y+7z-2=0$;
3) $3x-4y+5=0$; 4) $x-8y+4z=0$.

384. Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси Oy отрезок $OB=5$ и перпендикулярной к вектору $\bar{n}\{3;\ -2;\ 4\}$.

385. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\ -3;\ 1)$ и перпендикулярной к вектору $\bar{n}\{2;\ -1;\ 3\}$.

386. Найти уравнение плоскости: 1) проходящей через ось Oy и точку $(2;\ -1;\ 1)$; 2) проходящей через ось Oz и точку $(3;\ 1;\ 0)$; 3) параллельной оси Ox и проходящей через точки $(0;\ 2;\ 1)$ и $(-1;\ 1;\ 2)$; 4) параллельной оси Oy и проходящей через точки $(1;\ 0;\ 2)$ и $(2;\ 1;\ 0)$.

387. Найти расстояния:
1) точки $A(1;\ -1;\ 2)$ от плоскости $4x-4y+2z+30=0$;
2) точки $B(-2;\ 3;\ 5)$ от плоскости $x-8y+4z+1=0$.

388. Найти расстояние от начала координат до плоскости $2x+y-2z-15=0$.

389. Определить взаимное расположение точек $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(2;\ 0;\ 3)$, $C(2;\ -1;\ -3)$ и плоскости $x-2y+3z-8=0$.

390. Написать уравнение плоскости: 1) параллельной координатной плоскости xOy и проходящей через точку $(1;\ 2;\ 5)$; 2) параллельной координатной плоскости yOz и проходящей через точку $(3;\ 1;\ 2)$; 3) параллельной координатной плоскости xOz и проходящей через точку $(0;\ -2;\ 1)$.

391. Написать уравнение плоскости, заданной точкой $M(2;\ -3;\ 7)$ и вектором нормали $\bar{n}\{3;\ -2;\ 1\}$.

392. Написать уравнение плоскости, если направляющие косинусы нормали $\cos\alpha = \frac{4}{9}$, $\cos\beta = \frac{7}{9}$, $\cos\gamma = -\frac{4}{9}$ и плоскость проходят через начало координат.

393. Даны две точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Написать уравнение плоскости, проведенной через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\overline{M_1M_2}$.

394. Построить плоскость $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и найти углы ее нормали с осями координат.

395. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 2; -4)$ и перпендикулярной к вектору $\overline{OM}$.

396. Найти расстояние d точки $(2; 1; 0)$ от плоскости, проходящей через точки $P(1; 0; 2)$, $Q(1; 2; -1)$, $R(2; -2; 1)$.

397. Найти угол между плоскостью $2x + y - 2z - 3 = 0$ и координатной плоскостью yOz.

398. Найти угол между плоскостями:

1) $x + 2y - 2z + 1 = 0$ и $x + y - 4 = 0$;
2) $3x + 4y - 1 = 0$ и $y = 0$;
3) $4x - 7y - 4z - 2 = 0$ и $2x + y - 2z + 5 = 0$.

399. Показать, что плоскости $x - y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + 2z + 3 = 0$ параллельны между собой.

400. Показать, что плоскости $x + 2y - 5z + 1 = 0$ и $3x - 4y - z - 2 = 0$ перпендикулярны между собой.

401. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости $x - 2y + z = 3$.

402. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1; -1; 2)$ параллельно плоскости $2x - 3y + z = 5$.

403. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $(1; 0; 1)$ и $(1; 2; -3)$ перпендикулярно к плоскости $x - y + z - 1 = 0$.

404. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1; -1; 1)$ и перпендикулярной к плоскостям $2x - y + z - 1 = 0$ и $x + 2y - z + 1 = 0$.

405. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(2; 0; 1)$ и перпендикулярной к плоскостям $x + y - z = 0$ и $y = 2z$.

406. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку $(2; 1; -1)$ перпендикулярно к плоскости $2x - 3z = 0$.

407. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x - y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + 2z - 5 = 0$.

408. Написать уравнение плоскости, если известно, что точка $(2; 1; -3)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

409. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, соответственно равные 2; -3; 4.

410. Найти точку пересечения плоскостей $x+y-z+1=0$; $2x-y+z+3=0$; $x+y+z-1=0$.

§ 5. Уравнение прямой в пространстве. Пересечение прямой и плоскости

1. Прямую в пространстве можно определить, как пересечение двух плоскостей, поэтому общими уравнениями прямой будут два уравнения первой степени, составляющие систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Положение прямой в пространстве можно определить также данной точкой $M_0(a_0;\ b;\ c)$, лежащей на прямой (рис. 50), и направляющим вектором $\bar{s}\{m;\ n;\ p\}$. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ есть произвольная точка прямой, тогда из рис. 50 видно, что

$$\overline{OM}=\overline{OM_0}+\overline{M_0M}$$

или

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{s}t, \qquad (2)$$

где t — параметр.

Уравнение (2) называется *векторным* уравнением прямой. Напишем уравнение (2) в проекциях:

$$x=a+mt;\ y=b+nt;\ z=c+pt, \qquad (3)$$

отсюда, исключив t, получим

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \qquad (4)$$

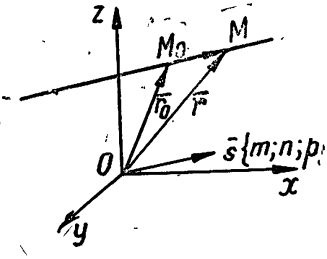


Рис. 50

Проекции m, n, p вектора $\bar{s}$ на оси Ox, Oy и Oz называются *направляющими коэффициентами* прямой.

Уравнения (3) называют *параметрическими* уравнениями прямой, а уравнения (4) — *каноническими*. Заметим, что направляющие коэффициенты m, n, p можно заменить соответственно величинами mk, nk, pk, где $k\neq 0$. Ненулевой вектор $k\bar{s}\{km;\ kn;\ kp\}$ будет выполнять ту же роль, что и коллинеарный ему вектор $\bar{s}\{m;\ n;\ p\}$.

Если один из коэффициентов равен нулю, например $m=0$, то система $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ равносильна системе $x-a=$

$= 0$, $\frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ и в этом случае прямая перпендикулярна к оси Ox.

Если какие-либо два коэффициента равны нулю, например $m = n = 0$, то система $\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{p}$ равносильна системе $x - a = 0$, $y - b = 0$ и прямая параллельна оси Oz.

Пусть прямая проходит через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В этом случае можно положить направляющий вектор прямой $\bar{s} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$.

Подставив в уравнение (4)

$$m = x_2 - x_1,\ n = y_2 - y_1,\ p = z_2 - z_1,\ a = x_1,\ b = y_1,\ c = z_1,$$

получим уравнение прямой, проходящей через две данные точки,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{5}$$

Если три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$ лежат на одной прямой, то выполняется условие

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{6}$$

Если знаменатели уравнений (4) разделим на $s = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$, то получим:

$$\frac{x-a}{\frac{m}{s}} = \frac{y-b}{\frac{n}{s}} = \frac{z-o}{\frac{p}{s}}$$

или

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}, \tag{4'}$$

где α, β, γ — углы, образованные прямой с осями координат Ox, Oy, Oz. Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* прямой и вычисляются при помощи формул:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{m}{s} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};\\ \cos\beta &= \frac{n}{s} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};\\ \cos\gamma &= \frac{p}{s} = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Угол между двумя прямыми

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{s}t \text{ и } \bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{s}_1 t,$$

где $\bar{r}_0 = \{a; b; c\}$; $\bar{s} = \{m; n; p\}$; $\bar{r}_1 = \{a_1; b_1; c_1\}$, $\bar{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$, или прямыми

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1} \tag{8}$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\bar{s}, \bar{s}_1}) = \frac{\bar{s}\bar{s}_1}{ss_1} = \frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \tag{9}$$

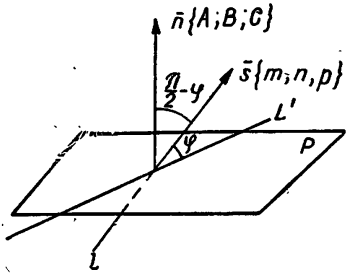


Рис. 51

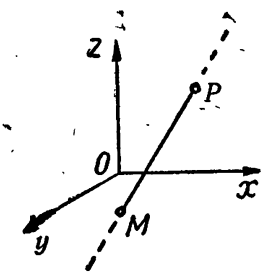


Рис. 52

Условие параллельности прямых (8):

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}. \tag{10}$$

Условие перпендикулярности прямых (8):

$$mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0. \tag{11}$$

2. Углом между прямой L и плоскостью P называется угол $\varphi \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, образованный прямой с ее проекцией L' на плоскость (рис. 51).

Пусть направляющий вектор прямой $\bar{s}\{m; n; p\}$ и нормальный вектор плоскости $\bar{n}\{A; B; C\}$, тогда

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\bar{n}\bar{s}}{ns} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Заметим, что $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$, где $\sin\varphi \geqslant 0$, следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{12}$$

Если прямая (4) параллельна плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{13}$$

то угол между ними $\varphi = 0$, отсюда и $\sin\varphi = 0$, следовательно, числитель дроби (12)

$$Am + Bn + Cp = 0 \tag{14}$$

(условие параллельности).

Если прямая (4) перпендикулярна к плоскости (13), то векторы $\bar{n}\{A; B; C\}$ и $\bar{s}\{m; n; p\}$ параллельны, следовательно, будет выполняться условие

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \tag{15}$$

(условие перпендикулярности прямой к плоскости).

Если условие (14) не выполняется, то прямая (4) и плоскость (13) пересекаются. Чтобы найти точку их пересечения, надо решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}, \\ &Ax + By + Cz + D = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

411. Построить прямые:

1) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z + 4 = 0, \\ x + 2y + z - 5 = 0; \end{cases}$ 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{3}$.

Построение. Известно, что положение прямой можно определить двумя точками, принадлежащими ей, поэтому мы найдем следы прямой (т. е. точки пересечения прямой с координатными плоскостями) на каких-нибудь двух координатных плоскостях, например на плоскостях xOy и xOz, затем через полученные две точки проведем искомую прямую.

Найдем точку пересечения прямой с координатной плоскостью xOy. Полагая в системе 1 $z = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0, \end{cases}$$

отсюда $x = 1$, $y = 2$. Следовательно, $M(1; 2; 0)$ — точка пересечения прямой с плоскостью xOy.

Теперь найдем точку пересечения прямой с координатной плоскостью xOz. Полагая в системе 1 $y = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3z + 4 = 0, \\ x + z - 5 = 0, \end{cases}$$

отсюда $x = 2{,}2$ и $z = 2{,}8$. Следовательно, $P(2{,}2; 0; 2{,}8)$ — точка пересечения прямой с координатной плоскостью xOz. Через точки M и P проводим искомую прямую (рис. 52).

2) Аналогично, если $z=0$, то $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-4}=0$, отсюда $\frac{x-2}{2}=0$, $\frac{y}{-4}=0$, т. е. $x=2$, $y=0$. Следовательно, $E(2;\ 0;\ 0)$ — точка пересечения прямой с координатной плоскостью xOy. Пусть $x=0$, тогда $\frac{y}{-4}=\frac{z}{3}=-1$, отсюда $y=4$, $z=-3$. Следовательно, $F(0;\ 4;\ -3)$ — точка пересечения прямой с координатной плоскостью yOz. Через точки E и F проводим искомую прямую.

412. Найти направляющие косинусы прямой

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$$

Решение. Сначала приведем уравнения прямой к каноническому виду. Для этого в данной системе уравнений исключим переменную x и выразим z через y:

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases} \left|\begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}\right| \quad \begin{matrix} 2x-3y-3z-9=0 \\ -2x+4y-2z-6=0 \\ \hline y-5z-15=0. \end{matrix}$$

Отсюда

$$z=\frac{y-15}{5}. \qquad (A)$$

Теперь выразим z через x:

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}\right| \quad \begin{matrix} 4x-6y-6z-18=0 \\ -3x+6y-3z-9=0 \\ \hline x-9z-27=0. \end{matrix}$$

Отсюда

$$z=\frac{x-27}{9}. \qquad (B)$$

Учитывая выражения (A) и (B), напишем уравнения прямой в каноническом виде

$$\frac{x-27}{9}=\frac{y-15}{5}=\frac{z}{1}.$$

Нетрудно видеть, что прямая проходит через точку $M(27;\ 15;\ 0)$, направляющие коэффициенты ее $m=9$, $n=5$, $p=1$ и направляющий вектор $\bar{s}=\{9;\ 5;\ 1\}$ или $\bar{s}=9\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k}$.

Направляющие косинусы прямой найдем по формулам (7):

$$\cos\alpha=\frac{m}{s}=\frac{9}{\sqrt{81+25+1}}=\frac{9}{\sqrt{107}};$$

$$\cos\beta=\frac{n}{s}=\frac{5}{\sqrt{107}};\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{107}}.$$

413. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} x - 2z + 3 = 0, \\ y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{(A)}$$

и плоскостью

$$2x - y + z + 3 = 0. \quad \text{(B)}$$

Решение. Уравнения прямой (A) напишем в каноническом виде. Из первого уравнения системы (A) $z = \frac{x+3}{2}$, из второго уравнения $z = \frac{1-y}{3}$, отсюда

$$\frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z}{1}$$

или

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1}.$$

Следовательно, направляющие коэффициенты прямой $m = 2$, $n = -3$, $p = 1$ и по условию координаты нормального вектора плоскости (B) $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$. Для определения угла воспользуемся формулой (12):

$$\sin\varphi = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 1}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{4+9+1}} = \frac{4\sqrt{21}}{21} \approx 0{,}8730.$$

Этому значению $\sin\varphi$ соответствует угол $\varphi \approx 60°49'$.

414. Прямая L проходит через точку $(2; 1; -1)$ и точку пересечения прямой

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad \text{(A)}$$

с плоскостью

$$x - y + z - 1 = 0. \quad \text{(B)}$$

Найти угол, образованный прямой L с плоскостью

$$x + 2y - z + 3 = 0. \quad \text{(C)}$$

Решение. Прямая (A) и плоскость (B) пересекаются, так как условие параллельности (14) не выполнено, т. е. $2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \neq 0$. Найдем точку пересечения прямой (A) с плоскостью (B). Напишем уравнения прямой (A) в параметрической форме:

$$\frac{x-3}{2} = t, \quad \frac{y}{-1} = t, \quad z + 1 = t,$$

отсюда

$$x = 2t + 3, \quad y = -t, \quad z = t - 1.$$

Полученные значения x, y, z подставим в уравнение (B) и найдем t:

$$2t+3-(-t)+t-1-1=0 \text{ или } 4t+1=0,$$

отсюда $t=-\frac{1}{4}$.

Следовательно, $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=-\frac{5}{4}$.

Теперь напишем уравнения прямой L, проходящей через точки $(2;\ 1;\ -1)$ и $\left(\frac{5}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{5}{4}\right)$:

$$\frac{x-2}{\frac{5}{2}-2}=\frac{y-1}{\frac{1}{4}-1}=\frac{z+1}{-\frac{5}{4}+1}$$

или

$$\frac{x-2}{\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{3}{4}}=\frac{z+1}{-\frac{1}{4}},$$

или

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{-1}.$$

Угол между прямой L и плоскостью (C) найдем по формуле (12):

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot 2+2(-3)+(-1)(-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{14}\approx 0{,}3274.$$

По таблицам тригонометрических величин находим $\varphi\approx 19°7'$.

415. Найти расстояние от точки $M(2;\ 3;\ 1)$ до прямой

$$\frac{x+5}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}. \qquad \text{(A)}$$

Решение. Через данную точку M проведем плоскость P, перпендикулярную к данной прямой. Затем найдем точку пересечения N этой плоскости с прямой (A). Отрезок MN будет лежать в плоскости P, перпендикулярной к прямой (A), следовательно, он будет служить перпендикуляром, опущенным из точки M на данную прямую, основанием которого будет точка N. Кратчайшим расстоянием от точки M до данной прямой будет длина перпендикуляра MN, проведенного из точки M на прямую (A).

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку M:

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z-1)=0. \qquad \text{(B)}$$

Определим коэффициенты A, B, C так, чтобы плоскость (В) была перпендикулярна к прямой (А). Воспользуемся условием перпендикулярности прямой к плоскости (15):

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{-2}.$$

Можно положить $A = 1$, $B = -3$, $C = -2$. Подставляя эти значения в уравнение (В), получаем уравнение плоскости P:

$$x - 2 - 3(y - 3) - 2(z - 1) = 0$$

или

$$x - 3y - 2z + 9 = 0. \qquad (B')$$

Теперь найдем точку пересечения этой плоскости с данной прямой. Напишем уравнения (А) в параметрической форме:

$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2} = t,$$

отсюда

$$x = t - 5;\ y = -3t + 4;\ z = -2t + 3.$$

Подставив эти значения в уравнение плоскости (В'), получим

$$t - 5 - 3(4 - 3t) - 2(3 - 2t) + 9 = 0$$

или

$$14t - 14 = 0,$$

отсюда $t = 1$.

Следовательно, точка пересечения плоскости (В') и прямой (А) будет иметь координаты

$$x = 1 - 5 = -4;\ y = -3 + 4 = 1;\ z = -2 + 3 = 1.$$

Теперь найдем расстояние между двумя точками $M(2; 3; 1)$ и $N(-4; 1; 1)$ по формуле (1) § 1 гл. III:

$$MN = \sqrt{(2+4)^2 + (3-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

416. Найти следы прямых:

1) $\begin{cases} 2x - z + 2 = 0, \\ 3y + 4z - 5 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 - t; \end{cases}$ 3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}$

на плоскостях xOy и xOz и построить эти прямые.

417. Найти следы прямой $x + y - z + 2 = 0$, $x - 2y + z - 1 = 0$ на координатных плоскостях xOy, xOz, yOz.

418. Проверить, лежит ли точка $M(2; 3; -4)$ на прямой $2x + 2y + z - 6 = 0$, $5x - 2y + 3z + 8 = 0$.

419. Проверить, проходит ли прямая $x + y - z = 0$, $2x + 7y - 3z = 0$ через начало координат.

420. Написать уравнение оси Oy.

421. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $(2; -1; -3)$, $(3; 1; -5)$ и найти ее направляющие косинусы.

422. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $(-2; 5; -3)$.

423. Найти параметрические уравнения прямой:
1) проходящей через точку $(2; -3; 1)$ и параллельной вектору $\bar{s}\{-2; 4; 5\}$; 2) проходящей через точки $M(1; -1; -2)$ и $P(3; -2; 1)$.

424. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 1; -3)$ и образующей с осями координат углы $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$.

425. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(2; -3; 4)$ и образующей с осями координат углы $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 135°$.

426. Найти направляющие косинусы прямых:

$$1)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{-1};\quad 2)\ \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-4}.$$

427. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки: 1) $A(3; 5; -5)$, $B(4; 6; -4)$, $C(5; 7; -3)$; 2) $D(1; 2; -1)$, $E(2; -3; 3)$, $F(4; 2; 3)$.

428. Найти угол между прямыми

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-1};\quad \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{-4}.$$

429. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$x + 5y - z + 1 = 0;\quad 2x - 3z - 5 = 0.$$

430. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - z + 1 = 0, \\ y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

431. Указать взаимное расположение прямых:

$$1)\ \frac{x}{3} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-1}{-9} \text{ и } \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3};$$

$$2)\ \begin{cases} x - 5z + 2 = 0, \\ y - 4z - 7 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 2z - 3 = 0, \\ 4y - 9z + 4 = 0. \end{cases}$$

432. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(2; -3; 5)$: 1) параллельно оси Oz; 2) параллельно прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{7} = \frac{z+2}{-4}$; 3) параллельно прямой $x - 2y + 3z - 1 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$.

433. Найти прямую, проходящую через точку (1; — 3; 2) и перпендикулярную к прямым:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1};\quad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+3}{-5}.$$

434. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$ и точку (3; 2; — 1).

435. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (2; 1; — 3) и прямую $x-y-z-1=0,\ x+2y+3=0$.

436. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (1; 0; — 2) и прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}$.

437. Найти угол между прямой $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-1}$ и плоскостью $2x+y+4z-3=0$.

438. Найти угол между прямой $2x-y=3,\ 3x-z=2$ и плоскостью $2x-y+z+5=0$.

439. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (1; — 2; — 3) и параллельной прямым:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z}{2};\quad \frac{x+1}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

440. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z+1}{4};\quad \frac{x}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{4}.$$

441. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (2; — 1; 3) и параллельной прямым:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{3};\quad \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}.$$

442. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (2; 3; — 1) на плоскость:

1) $4x+5y-2z+3=0$; 2) $2x-3z+1=0$; 3) $y=5$.

443. Через точку (3; 1; — 2) провести плоскость, перпендикулярную к прямой

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{4}.$$

444. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (2; — 1; 3) и перпендикулярной к прямой $y=3,\ x+z=1$.

445. Найти точку пересечения:

1) прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости $x+y-z+2=0$;

2) прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-2}$ и плоскости $2x-y+3z=1$;

3) прямой $\begin{cases} x-y+z+3=0, \\ x+4z-5=0 \end{cases}$ и плоскости $x+2y-z=10$.

446. Найти точку пересечения прямой $x=2-t$, $y=3t$, $z=1+t$ с плоскостью $x+2y-z+3=0$.

447. Найти расстояние от точки $M(2;\ 0;\ 3)$ до прямой $2x-y+z=1$, $x+y+z=3$.

448. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$;

2) $\begin{cases} x+z-1=0, \\ y+2z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+z-1=0, \\ y+2z-1=0. \end{cases}$

449. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;\ 1;\ -2)$ и точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ и плоскости $2x-3y-5z=3$.

Часть вторая. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава IV Введение в анализ

§ 1. Действительные числа и числовая ось. Абсолютная величина числа

1. Числа рациональные и иррациональные называются *действительными*.

Для наглядности принято числа изображать точками на прямой линии, на которой устанавливается начало отсчета, положительное направление и масштаб. Такая прямая, как уже говорилось, называется *числовой прямой* или *числовой осью*.

2. *Абсолютной величиной числа* x называется само это число x, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$. Абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$.

Из этого определения следует, что если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, если $x < 0$, то $|x| = -x$. Например, $|3| = 3$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|-8| = 8$, $|0| = 0$.

Абсолютные величины обладают следующими свойствами:

I. Неравенство $|x| \leqslant \delta$ равносильно двойному неравенству $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$.

II. Абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых, т. е.

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

III. Абсолютная величина разности больше или равна разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого, т. е.

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|.$$

IV. Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей, т. е. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

V. Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя, т. е.

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

450. При каких значениях x справедливо равенство $|x+6| = -(x+6)$?

Решение. Из определения абсолютной величины следует, что $x+6\leqslant 0$ или $x\leqslant -6$.

451. Решить неравенства:

1) $|x-6|\leqslant 2$; 2) $(x+3)^2<1$; 3) $|x|>x$;

4) $|x^2-4x-5|>x^2-4x-5$.

Решение. 1) Согласно свойству I, напишем

$$-2\leqslant x-6\leqslant 2,$$

отсюда

$$4\leqslant x\leqslant 8.$$

2) $(x+3)^2-1<0$, откуда $x^2+6x+8<0$. Трехчлен разложим на множители $(x+2)(x+4)<0$.

Произведение будет отрицательным тогда, когда

$$\begin{cases} x+2<0, \\ x+4>0 \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} x+2>0, \\ x+4<0. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем

$$x<-2,\ x>-4 \text{ или } -4<x<-2.$$

Вторая система несовместна.

3) Неравенство 3 выполняется при $x<0$.

4) Неравенство 4 имеет место для тех значений x, при которых

$$x^2-4x-5<0.$$

Решим это неравенство.

Трехчлен разложим на множители

$$(x+1)(x-5)<0.$$

Произведение будет отрицательным тогда, когда

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x-5<0 \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} x+1<0, \\ x-5>0. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем

$$x>-1,\ x<5 \text{ или } -1<x<5.$$

Вторая система несовместна.

452. Найти:

1) $|-2|$; 2) $|1-\sqrt{2}|$; 3) $|\lg 0{,}5|$;

4) $|\log_2 0{,}2|$; 5) $|\sin 270^\circ|$; 6) $|\operatorname{tg} 135^\circ|$;

7) $\left|\sin\frac{\pi}{6}-1\right|$; 8) $\left|\frac{1}{1-x}\right|$; 9) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

453. Решить следующие неравенства:

1) $|x|<1$; 2) $|x|>0$;

3) $|x|\geqslant 2$; 4) $0<|x|\leqslant 3$;

5) $|x-2|<1$; 6) $|x-a|<\delta$;

7) $|x-a|>\delta$; 8) $0<|x-a|<\delta$;
9) $|x|>x-1$; 10) $|x^2-3x-4|>x^2-3x-4$;
11) $\left|\frac{x}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}$; 12) $|x-1|<|x-2|$.

§ 2. Переменная величина. Функция. Область определения функции. Способы задания функции. Основные элементарные функции и их графики. Сложная функция. Классификация функций

1. Величина, принимающая различные числовые значения, называется *переменной*, а принимающая только одно значение — *постоянной*. Постоянную величину можно рассматривать как частный случай переменной, принимающей одни и те же значения.

Переменная x считается заданной, если известно множество значений, которые она может принимать. Это множество называется *областью изменения переменной*.

Если каждому значению одной переменной величины x, взятому из области его изменения, по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение другой переменной величины y, то y называется *зависимой переменной* или *функцией* (однозначной) *от независимой переменной* (аргумента) x.

Если y есть функция от x, то пишут $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=F(x)$.

Область изменения аргумента x называется *областью определения* или *областью существования функции*, а множество значений функции y — *областью изменения функции*. Обычно областью определения функции являются: замкнутый промежуток, или сегмент $[a, b]$:

$$a\leqslant x\leqslant b;$$

открытый промежуток, или интервал (a, b):

$$a<x<b;$$

полуоткрытые промежутки, или полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$:

$$a\leqslant x<b,\quad a<x\leqslant b.$$

К ним присоединяются: $(a, +\infty)$, $(-\infty\ a)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, +\infty)$.

Область определения функции может состоять из одного или нескольких промежутков и из отдельных точек. Область изменения функции (множество ее значений) определяется законом соответствия.

Заметим, что если каждому значению аргумента x ставится в соответствие не одно, а несколько значений переменной y, то

в этом случае переменная y называется *многозначной функцией*. Например, из уравнения окружности $x^2 + y^2 = r^2$ следует, что $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, т. е. каждому значению x ($|x| \leqslant r$) ставится в соответствие два значения y.

В дальнейшем будем рассматривать однозначные функции.

2. Две функции называются *тождественными*, если они определены в одной и той же области и принимают одинаковые значения для каждого x из этой области.

3. Частное значение функции $f(x)$ в точке x_0, т. е. ее значение при $x = x_0$, обозначается символом $f(x_0)$. Например, если $f(x) = x^2 - 3x + 1$, то $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$; $f(0) = 1$. Если $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$, то $\varphi(3) = \frac{1}{1+3^2} = 0{,}1$; $\varphi(-2) = \frac{1}{1+(-2)^2} = 0{,}2$; $\varphi(a) = \frac{1}{1+a^2}$ и т. п.

4. Введем понятие обратной функции. Пусть функция

$$y = f(x) \tag{1}$$

задана в области X, а множество значений ее Y (X и Y — промежутки). Поменяем роли переменных: будем считать y аргументом, а x функцией. Возьмем какое-нибудь значение y_0 из области Y, тогда в области X необходимо найдется одно значение x_0 такое, что $y_0 = f(x_0)$, либо несколько значений x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) таких, что $y_0 = f(x_i)$. Это будет иметь место для каждого y из множества Y. Следовательно, на множестве Y уравнение (1) определяет однозначную или многозначную функцию

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

которая называется *обратной* для функции (1) и удовлетворяет всем значениям y из Y условию $y = f[\varphi(y)]$. Может оказаться, что уравнение (1) можно решить относительно x. Тогда, решив его, найдем обратную функцию (2) по отношению к данной функции (1). Заметим, что если функция (2) обратная по отношению к функции (1), то очевидно, что функция (1) обратная по отношению к функции (2). Функции (1) и (2) называются *взаимно обратными*.

Приведем примеры. 1) $y = x^2$ — прямая функция; $x = \pm\sqrt{y}$ — обратная функция двузначная. Вместо двузначной функции можно рассматривать две однозначные функции $x = \sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$, которые являются обратными для функции $y = x^2$.

Обычно аргумент принято обозначать буквой x, а функцию буквой y. В этом случае обратную функцию (2) по отношению к функции (1) можно записать так:

$$y = \varphi(x).$$

2) $y = 2^x$ — прямая функция; $y = \log_2 x$ — обратная функция.

3) $y = 2x + 3$ — прямая функция; $x = \frac{y-3}{2}$ или $y = \frac{x-3}{2}$ — обратная функция.

5. Если функция задана одной или несколькими формулами, то говорят, что она задана аналитическим способом. Например, функции

$$y = x^2 + 1; \quad \varphi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 0; \\ x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Функцию можно задать также при помощи графика (графический способ) или при помощи таблицы (табличный способ). Читатель неоднократно пользовался таблицами тригонометрических величин, логарифмическими и др. Заметим, что графический способ задания функции чаще всего является вспомогательным, но весьма полезным, так как график дает наглядное представление о свойствах функции, подлежащей исследованию.

6. *Основными элементарными функциями* называются следующие: 1) степенная функция $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число; 2) показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; 3) логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; 4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, а также сравнительно редко употребляемые функции $y = \sec x$, $y = \operatorname{csc} x$; 5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, а также $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccsc} x$.

7. Функция называется *сложной,* если ее аргумент в свою очередь есть функция от другой переменной. Пусть функция $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, все значения которой содержатся в области определения функции $f(u)$, тогда $y = f[\varphi(x)]$ есть сложная функция, или функция от функции. Например, $y = \sin u$, $u = \lg x$, тогда $y = \sin \lg x$; $y = \operatorname{tg} u$, $u = 3x + 1$, тогда $y = \operatorname{tg}(3x + 1)$.

8. Алгебраические операции (действия) над переменными величинами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с целым показателем и извлечение корня) и трансцендентные (возведение в степень с иррациональным показателем, логарифмирование, вычисление значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций) называются *элементарными.*

Функция y от x называется *элементарной,* если ее можно задать одной формулой вида $y = f(x)$ для всех x из области определения так, что каждое ее значение может быть получено из постоянных чисел и значения независимой переменной при помощи конечного числа элементарных операций.

Например, значение элементарной функции (в данном случае сложной функции)

$$y = \lg(x^2 + 5x - 4)$$

при $x = 2$ равно 1. Это значение найдено при помощи пяти операций.

Указанное число операций сохранится при любом x из области определения функции, т. е. если функция элементарна, то число элементарных операций для нахождения значений функции не зависит от ее аргумента. Значение функции $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{6}$ равно $\frac{1}{2}$. Здесь потребовалась только одна операция.

Примерами неэлементарных функций могут служить следующие:

$$y = n!; \quad y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leqslant 0; \\ x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что количество операций, необходимых для определения значений первой функции, неограниченно возрастает с возрастанием n. Вторая функция задана в промежутке $(-\infty, 0]$ одной формулой, а в промежутке $(0, +\infty)$ — другой, т. е. функция определена различными формулами на различных промежутках изменения аргумента x.

Элементарная функция $y = f(x)$ называется *алгебраической*, если каждое ее значение может быть получено из постоянных чисел и значения независимой переменной — при помощи конечного числа алгебраических операций.

Алгебраические функции делятся на *рациональные* и *иррациональные*.

К рациональным функциям принадлежат:

1) Целая рациональная функция, т. е. функция вида

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где n — неотрицательное целое число, называемое степенью многочлена; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа.

Например, $y = x^2 - 3x + 1$; $y = x + 3$; $y = 5$; $y = x^3 - 4x + \sqrt{2}$; $y = x + \lg 5$; $y = ax + b$.

2) Дробная рациональная функция, т. е. функция вида

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Например, $f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 2}$; $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Алгебраические функции, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными алгебраическими* функциями.

Например, $y = \sqrt{x}$; $y = 5x^2 + 3x - \sqrt[3]{x} + 1$.

Элементарные функции, не являющиеся алгебраическими, называются *элементарными трансцендентными* функциями.

Например, $f(x) = 3x + \sin x + 1$; $f(x) = 2 + 3 \lg x$; $f(x) = 2^x + 3$; $f(x) = \arcsin x$.

454. Дана функция (дробная рациональная) $f(x) = \frac{2x-3}{3x^2-1}$. Найти $f(-2)$; $f(0)$; $f(1)$.

Решение. $f(-2) = \frac{2(-2)-3}{3(-2)^2-1} = -\frac{7}{11}$; $f(0) = 3$; $f(1) = -\frac{1}{2}$.

Функция $f(x)$ в точках $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ не определена, так как в этих точках знаменатель обращается в нуль.

455. Найти области определения следующих функций:

1) $y = \sqrt{3 + 2x}$; 2) $f(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2}$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$; 4) $y = \sqrt{3 - x} + \arccos \frac{x-2}{3}$.

Решение. 1) Функция определена в тех точках, в которых $3 + 2x \geqslant 0$ или $2x \geqslant -3$, откуда $x \geqslant -\frac{3}{2}$. Итак, функция определена в промежутке $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$.

2) Функция принимает действительные значения в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком корня, будет иметь неотрицательные значения: $9 - x^2 \geqslant 0$ или $x^2 \leqslant 9$, откуда $|x| \leqslant 3$, т. е. $-3 \leqslant x \leqslant 3$ (рис. 53, *а*). Таким образом, функция определена на сегменте $[-3, 3]$.

3) Надо потребовать, чтобы $\lg \frac{5x - x^2}{4} \geqslant 0$, откуда $\frac{5x - x^2}{4} \geqslant 1$ или $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$. Решая это неравенство, получаем $1 \leqslant x \leqslant 4$. Функция определена на сегменте $[1, 4]$.

4) Функция $\sqrt{3 - x}$ определена в тех точках, в которых $3 - x \geqslant 0$ или $x \leqslant 3$ (рис. 53, *б*).

Функция $\arccos \frac{x-2}{3}$ определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|\frac{x-2}{3}\right| \leqslant 1 \text{ или } -1 \leqslant \frac{x-2}{3} \leqslant 1,$$

откуда

$$-3 \leqslant x - 2 \leqslant 3 \text{ или } -1 \leqslant x \leqslant 5 \text{ (рис. 53, } в\text{)}.$$

Таким образом, данная функция y определена на сегменте $[-1, 3]$ (рис. 53 *г*).

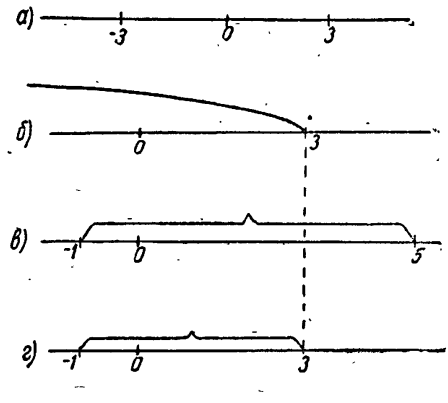


Рис. 53

456. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $g(x) = \frac{1}{x}$;

2) $f(x) = x$ и $g(x) = \sqrt{x^2}$?

Решение. 1) Обе функции определены на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$. Таким образом, области определения обеих функций совпадают. Функции принимают одинаковые значения при любом x из области определения

$$f(x) = \frac{x}{xx} = \frac{1}{x} = g(x).$$

Следовательно, данные функции тождественны.

2) Области определения обеих функций совпадают (функции определены на всей числовой прямой, т. е. в интервале $(-\infty, +\infty)$). Функции принимают одинаковые значения для $x \geqslant 0$:

$$g(x) = \sqrt{x^2} = x = f(x)$$

(имеется в виду функция $g(x) = \sqrt{x^2}$ однозначная, т. е. берется арифметическое значение корня) и различные значения для $x < 0$:

$$g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x = f(x).$$

Следовательно, функции $f(x)$ и $g(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ нетождественны.

457. Дана функция $f(t) = 2t^3 - 3t + 4$. Найти $f(-2)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(a)$.

458. Дана функция $\varphi(t) = \frac{2t-1}{t^2-9}$. Найти $\varphi(-1)$; $\varphi(1+a)$. В каких точках функция не определена?

459. Дана функция $\psi(x) = 5^{1-x}$. Найти $\psi(0)$; $\psi(1)$; $\psi(2)$; $\psi(-2)$; $\psi(1{,}5)$.

460. Дана функция $f(x) = x^2 + 3$. Найти $f(0)$; $f(1)$; $f(-2)$; $f(\sqrt{2})$; $f(3\sqrt{3})$; $f(\sqrt{2}-1)$; $f(\sqrt{2}+1)$.

461. Дана функция $f(x) = \sin x$. Найти $f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $f(x)\frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$; $2f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)f(x+\pi)$; $f(1)$; $f(-2)$.

462. Дана функция $f(x) = \lg x$. Чему равно $10^{f(x)}$, $f(10^{1+\sqrt{2}})$?

463. Объем куба равен кубу его стороны. Какие числа могут быть значениями аргумента?

464. Урожайность зерновых в СССР в 1922—1934 гг. приближенно определяется по формуле $y = 6{,}467 + 0{,}176\,(t - 1921)$, где t — год; y — урожайность в *ц/га*. Составить таблицу значений этой функции при $t = 1922, 1923, \ldots, 1934$.

465. Найти области определения следующих функций:

1) $y = x$;
2) $y = \sqrt{x}$;
3) $y = \sqrt{5 - 2x}$;
4) $y = 1 - \lg x$;
5) $y = \lg(-x) - \frac{1}{x+5}$;
6) $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$;
7) $y = \lg(x^2 - 6x + 5)$;
8) $y = \log_2(x^3 - 6x^2 + 5x)$;
9) $y = \log_3(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$;
10) $y = \sqrt{\frac{x-20}{2-x}}$;
11) $y = \sqrt{\cos x}$;
12) $y = \arcsin \frac{1}{x}$;
13) $y = \arccos(\lg x)$;
14) $y = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{x}$;
15) $y = \log_5[1 - \log_3(x^2 - 5x)]$;
16) $y = \arcsin \frac{x+1}{x-1}$;
17) $y = \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{6}{x}$.

466. Тождественны ли следующие функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x}$ и $g(x) = 1$;
2) $f(x) = \lg x^2$ и $g(x) = 2 \lg x$;
3) $f(x) = \sqrt{x^4}$ и $g(x) = x^2$;
4) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $g(x) = x$;
5) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ и $g(x) = 1$;
6) $f(x) = a^{\log_a x}$ и $g(x) = x$;
7) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ и $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$;
8) $f(x) = \log_2(x-1) + \log_2(x-2)$ и $g(x) = \log_2[(x-1)(x-2)]$;
9) $f(x) = \sin(\arcsin x)$ и $g(x) = x$;
10) $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ и $g(x) = x$?

§ 3. Некоторые классы функций

1. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* в некоторой области значений аргумента, если существует такое число $A(B)$, что $f(x) \leqslant A$ $(f(x) \geqslant B)$ для любого x из этой области. Если такого числа $A(B)$ не существует, функция называется *неограниченной сверху (снизу)*.

Функция называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу. В противном случае функция называется *неограниченной*.

Приведем примеры. 1) Функция $y = \sin x$ определена на всем множестве действительных чисел, ограничена, так как при любых значениях x по абсолютной величине не превосходит 1, т. е. $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

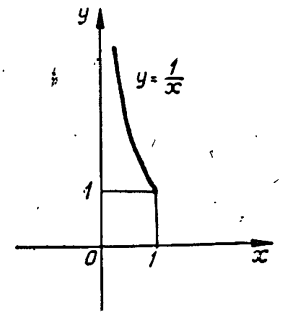


Рис. 54

2) Функция $y = \frac{1}{x}$ в промежутке $(0, 1]$ ограничена снизу, например, числом 1, но не ограничена сверху (рис. 54).

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ не ограничена, т. е. $-\infty < y < +\infty$.

2. Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в некоторой области, если для любой пары чисел x_1 и x_2, принадлежащих этой области, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$.

Если же из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $[f(x_1) \geqslant f(x_2)]$, то функция $f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)*.

Функции, удовлетворяющие первому условию или второму, называются *монотонными*.

Например, функция $f(x) = x^3$ возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$; функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

3. Область определения E функции $f(x)$ называется *симметричной* относительно начала координат, если, каково бы ни было число x из E, число $-x$ тоже принадлежит этой области.

Функция $f(x)$, определенная в симметричной области, называется *четной*, если

$$f(x) = f(-x), \tag{1}$$

и *нечетной*, если

$$f(-x) = -f(x). \tag{2}$$

Как для четных, так и для нечетных функций очевидно, что справедливо равенство

$$|f(x)| = |f(-x)|. \qquad (3)$$

Приведем примеры. 1) Четные функции: $f(x) = x^{2n}$, в частности, $f(x) = x^2$ (рис. 55, *а*); $f(x) = \cos x$ (функции определены в интервале $(-\infty, +\infty)$). 2) Нечетные функции: $f(x) = x^{2n-1}$, в частности, $f(x) = x^3$ (рис. 55, *б*); $f(x) = \sin x$.

Легко убедиться, что не всякая функция будет удовлетворять условию (3), т. е. не всякая функция будет либо четной, либо нечетной.

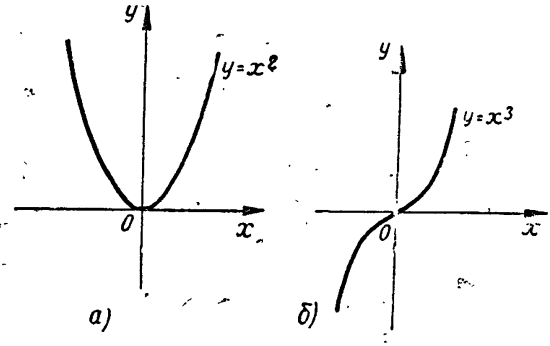


Рис. 55

Приведем примеры. 1) $f(x) = 3x + 4$; $f(1) = 7$; $f(-1) = 1$; $f(2) = 10$; $f(-2) = -2$. Условие (3) не выполнено. 2) $f(x) = 3^x$; $f(1) = 3$; $f(-1) = \frac{1}{3}$. Условие (3) не выполнено.

График четной функции расположен симметрично относительно оси Oy (см. рис. 55, *а*). График нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат (см. рис. 55, *б*).

4. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $\omega \neq 0$, что вместе с любой точкой x области определения $f(x)$ принадлежат также все точки $x + k\omega$ ($k = \pm 1$; ± 2; ...) и $f(x + \omega) = f(x)$.

Число ω называется *периодом* функции $f(x)$. Наименьший положительный период, если он существует, называется *основным периодом*.

Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ периодические с периодом (основным) 2π, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют период π.

467. Доказать, что следующие функции ограничены в области их определения:

1) $\cos x$; 2) $\operatorname{arctg} x$; 3) $\frac{x^2}{x^2+1}$; 4) $\frac{x}{x^2+1}$; 5) e^{-x^2}; 6) $\frac{x}{|x|}$.

468. Доказать, что следующие функции не ограничены в области их определения:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; 3) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

469. Доказать, что функция $y = 2^x$ ограничена снизу и не ограничена сверху.

470. Доказать, что функция $y = 1 - x^2$ ограничена сверху и не ограничена снизу.

471. Построить графики следующих функций и, пользуясь этими графиками, определить промежутки их убывания и возрастания:

1) $f(x) = x^2$; 2) $y = x^3$;
3) $y = \log_2 x$; 4) $y = \operatorname{tg} x$;
5) $f(x) = 3^x$; 6) $f(x) = \sin x$.

472. Выяснить, какие из данных функций являются четными и какие нечетными:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 2) $f(x) = x + \cos x$; 3) $f(x) = x^2 + \cos x$;

4) $f(x) = \lg x$; 5) $f(x) = x + \sin x$.

Решение. Заменяя x на $-x$, получаем:

1) $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, отсюда следует, что $f(-x) = f(x)$, т. е. функция четная;

2) $f(-x) = -x + \cos(-x) = -x + \cos x$, отсюда $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, т. е. функция не является четной и нечетной;

3) $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x$, отсюда $f(-x) = f(x)$, т. е. функция четная;

4) функция определена на интервале $(0, +\infty)$ и не определена на интервале $(-\infty, 0)$, следовательно, она задана на несимметричной области. Поэтому эта функция не будет четной и нечетной;

5) $f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x$, отсюда $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция нечетная.

473. Доказать, что следующие функции четные:

1) $f(x) = |x|$; 2) $f(x) = x^4$;
3) $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$; 4) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$;
5) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$; 6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;
7) $f(x) = x \operatorname{tg} x$; 8) $f(x) = \frac{(1 + 2^x)^2}{2^x}$.

474. Доказать, что следующие функции нечетные:

1) $f(x) = x^5$; 2) $f(x) = \frac{|x|}{x}$;

3) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

5) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$; 6) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

475. Какие из указанных ниже функций четные, какие нечетные и какие из них не обладают этими свойствами:

1) $y = 5^x$; 2) $y = x^2 3^x$; 3) $y = x - x^3$; 4) $y = x^2 + 3x + 2$;

5) $y = x^3 + 2x + 1$; 6) $y = \sin^2 x$; 7) $y = \frac{x}{x-1}$; 8) $y = \frac{x}{x^2-1}$;

9) $y = x^4 + x^2 - 5$; 10) $f(x) = \text{const}$.

476. Доказать, что произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

477. Доказать, что произведение двух нечетных или двух четных функций есть функция четная.

478. Доказать, что всякая функция $f(x)$, заданная на некотором симметричном относительно начала координат множестве, может быть представлена (и притом однозначно) в виде суммы четной и нечетной на этом множестве функций.

479. Доказать, что следующие функции периодические:

1) $f(x) = \text{const} \neq 0$; 2) $f(x) = |\sin x|$;

3) $f(x) = \sin 3x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

5) $f(x) = \sin(6x - 2)$; 6) $f(x) = 3^{\cos x}$.

Найти их основные периоды.

§ 4. Графики простейших функций

Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

480. Построить графики следующих функций:

1) $y = -3x + 1$; 2) $y = x^2 + x$;

3) $y = x^2 + x + 1$; 4) $y = 2x^2 - 8x + 3$;

5) $y = \frac{1}{x^2}$; 6) $y = \frac{x-1}{x+1}$;

7) $y = \frac{2x}{1-x}$; 8) $y = \frac{2x-1}{1-x}$;

9) $y = \cos 2x$; 10) $y = 2^{-x}$;

11) $y = \log_{0,5} x$; 12) $y = |x| + x$ на сегменте $[-3, 3]$.

481. Рост национального дохода в СССР в 1932—1938 гг. приближенно определяется с помощью показательной функции

$$y = 43{,}1 \cdot 1{,}167^t,$$

где t — целое число лет, прошедших после 1932 г.; y — национальный доход, выраженный в млрд. руб. * Построить график этой функции.

§ 5. Числовая последовательность. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел последовательности. Предел функции

1. Функцию, заданную на множестве натуральных чисел, обычно называют *числовой последовательностью*. Вместо $f(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ пишут x_n. Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называют *членами* последовательности, а x_n — *общим членом* последовательности. Числовая последовательность считается заданной, если мы знаем закон ее образования. В частности, закон образования последовательности будет известен, если общий член ее x_n выражен формулой. Например, если $x_n = \frac{1}{n}$, то соответствующая последовательность будет

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

2. Переменная x_n называется *бесконечно малой*, если она становится и остается с некоторого номера N по абсолютной величине меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε, т. е. $|x_n| < \varepsilon$ для $n \geqslant N$ (номер N зависит от ε). Например, переменная $x_n = \frac{1}{n}$ есть бесконечно малая величина.

3. Переменная x_n имеет своим пределом число a, если разность между ними есть бесконечно малая величина, т. е. если $x_n - a = \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая.

Это обозначают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$, или $x_n - a \to 0$ при $n \to \infty$. Говорят также, что последовательность x_n сходится к a. В частности, если x_n есть бесконечно малая, то x_n — 0 также бесконечно малая величина, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ или } x_n \to 0 \ (n \to \infty).$$

Таким образом, предел бесконечно малой величины равен нулю.

---

* См.. О Ланге. Введение в экономику. М., 1964.

4. Переменная y_n называется *бесконечно большой*, если она становится и остается с некоторого номера N по абсолютной величине больше любого наперед заданного сколь угодно большого положительного числа M, т. е. $|y_n| > M$, для $n \geqslant N$ (номер N зависит от M).

Если y_n — бесконечно большая величина, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ или $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Например, переменная $y_n = (-1)^{n-1}n$, значения которой $1, -2, 3, -4, 5, \ldots, (-1)^{n-1}n$ есть бесконечно большая величина, так как она становится и остается с некоторого номера N по абсолютной величине больше сколь угодно большого числа $|M|$, $|y_n| > M$ при $n \geqslant N$ *. Пусть $M = 100$, тогда $|y_n| > 100$ при $n \geqslant N$, где $N \geqslant 101$ (в качестве номера N можно взять любое натуральное число большее 100). Если $M = 500$, то $N \geqslant 501$ и $|y_n| > 500$ для $n \geqslant N$. Следовательно, можно написать, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ или $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Заметим, что если переменная $x_n \neq 0$ есть бесконечно малая, то ее обратная величина $y_n = \frac{1}{x_n}$ будет бесконечно большой величиной, и, наоборот, если y_n есть бесконечно большая величина, то ее обратная величина $x_n = \frac{1}{y_n}$ будет бесконечно малой.

482. Доказать, что следующие переменные величины бесконечно малые:

1) $x_n = -\frac{1}{n}$; 2) $\alpha_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; 3) $\beta_n = \frac{1}{2n-1}$.

Решение. Полагая $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, напишем последовательность значений переменных:

1) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$;

2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots$;

3) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$,

отсюда видно, что с возрастанием n значения переменной x_n приближаются к нулю так, что с некоторого номера N абсолютные значения переменной будут меньше любого наперед за-

---

* Если бесконечно большая величина y_n с некоторого номера n сохраняет определенный знак, то говорят, что переменная y_n имеет предел $+\infty$ или $-\infty$, и записывают это следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

Очевидно, что бесконечно большая величина $y = \sqrt{n}$ стремится к $+\infty$, а бесконечно большая $y_n = -n$ стремится к $-\infty$ при $n \to +\infty$. Иногда вместо $+\infty$ пишут ∞, так, например, мы будем писать $n \to \infty$ вместо $n \to +\infty$.

данного сколь угодно малого положительного числа ε. Докажем это. Пусть дано $\varepsilon > 0$, тогда $|x_n| = \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$, отсюда $n > \frac{1}{\varepsilon}$, следовательно, можно принять номер $N > \frac{1}{\varepsilon}$, при значении которого для любых номеров $n \geqslant N$ будет выполняться неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}01$, тогда $\left|-\frac{1}{n}\right| < 0{,}01$ для всех номеров $n \geqslant N$, где $N > \frac{1}{0{,}01} = 100$ (можно взять $N = 101$).

Если $\varepsilon = \frac{3}{8}$, то $N > \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}$, т. е. можно принять номер $N = 3$. Следовательно, значения переменной по абсолютной величине $|x_n| < \frac{3}{8}$ для всех номеров $n \geqslant 3$. Это и означает, что переменная x_n есть бесконечно малая величина.

Аналогично доказывается, что переменные α_n и β_n также будут бесконечно малыми величинами.

483. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $a = \frac{2}{3}$ есть предел последовательности, $x_n = \frac{2n-1}{3n+5}$.

Решение. Рассмотрим разность $x_n - \frac{2}{3} = \frac{2n-1}{3n+5} - \frac{2}{3} = \frac{-13}{3(3n+5)}$ и оценим ее абсолютную величину

$$\left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-13}{3(3n+5)}\right| = \frac{13}{3(3n+5)}.$$

Нетрудно видеть, что $\frac{13}{3(3n+5)} < \frac{13}{3n+5} < \frac{13}{n}$.

Величина $\frac{13}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. бесконечно малая, следовательно, разность $x_n - \frac{2}{3} \to 0$ при $n \to \infty$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

5. *Определение 1.* Пусть функция $f(x)$ определена в некотором интервале:

а) число A называется пределом функции $f(x)$ при стремлении x к a (в точке a), если для любой последовательности значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

(входящих в область определения функции, но отличных от a), стремящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ стремится к A.

Этот факт записывают в таком виде:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to a;$$

б) если последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ... стремится к $+\infty$ или $-\infty$ при любой последовательности значений x_1, x_2, ..., x_n, ... (отличных от a), стремящейся к a, то говорят, что функция в точке a имеет предел, равный $+\infty$ или $-\infty$.

В этих случаях записывают так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ или } f(x) \to +\infty \text{ при } x \to a,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ или } f(x) \to -\infty \text{ при } x \to a;$$

в) если последовательность значений $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, ... стремится к ∞ при любой последовательности значений x_1, ..., x_n, ... ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, 3, \ldots$), стремящейся к a, то будем считать, что функция в точке a имеет предел, равный ∞, т. е. функция $f(x)$ в этом случае, так же как и в случае «б», будет бесконечно большой величиной при $x \to a$ или иначе функция в точке a обращается в бесконечность.

Это записывают так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ или } f(x) \to \infty \text{ при } x \to a.$$

Например, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3} = \infty$, так как при любой последовательности значений $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, стремящейся к 3, последовательность значений функции стремится к ∞ (см. п 4). Следовательно, функция $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ бесконечно большая величина при $x \to 3$.

Определение 2. Пусть функция определена в интервале $(b, +\infty)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$, если для любой последовательности значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (входящих в область определения функции), стремящейся к $+\infty$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ... стремится к A.

Это запишем в таком виде:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to +\infty.$$

Дайте определение предела функции для следующих случаев: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Приведите примеры на все эти случаи.

Заметим, что если функция $f(x)$ стремится к конечному пределу A при $x \to a$, то разность $f(x) - A$ будет бесконечно малой величиной при $x \to a$ и наоборот.

484. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{4x+3} = \frac{1}{2}$.

При каких значениях x значения функции будут отличаться от своего предела меньше чем на 0,01?

Решение. Рассмотрим абсолютную величину разности

$$|f(x) - A| = \left|\frac{2x-1}{4x+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2|4x+3|}.$$

В правой части равенства в знаменателе дроби — бесконечно большая величина при $x \to \infty$, а в числителе — постоянная, следовательно, дробь $\frac{5}{2|4x+3|}$ есть бесконечно малая величина (обратная величина бесконечно большой величины есть бесконечно малая).

Итак, разность между функцией $\frac{2x-1}{4x+3}$ и числом $\frac{1}{2}$ есть бесконечно малая величина. Это и означает, что предел данной функции — число $\frac{1}{2}$.

Теперь найдем значения x, при которых значения функции будут отличаться от своего предела меньше чем на 0,01.

Решим неравенство

$$\left|\frac{2x-1}{4x+3} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01 \quad \text{или} \quad \frac{5}{2|4x+3|} < 0{,}01,$$

отсюда

$$|4x+3| > 250.$$

Это неравенство выполняется при условии

$$4x+3 > 250 \quad \text{или} \quad 4x+3 < -250.$$

Решая эти два неравенства, соответственно получим

$$x > 61{,}75 \quad \text{и} \quad x < -63{,}25.$$

Следовательно, при $|x| > 63{,}25$ функция будет отличаться от своего предела меньше чем на 0,01.

485. Написать последовательности значений:

1) $x_n = \frac{1}{n^2}$; 2) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$; 3) $x_n = \frac{n}{2n-1}$;

4) $x_n = n^2$; 5) $x_n = \frac{1}{3n+1}$.

486. Доказать, что следующие переменные величины бесконечно малые:

1) $\alpha_n = \frac{1}{n}$; 2) $\beta_n = \frac{1}{n^2}$; 3) $\gamma_n = \frac{\sin n}{n}$; 4) $x_n = \frac{1}{n^2+n}$;

5) $x_n = \frac{n}{n^2+1}$; 6) $x_n = \frac{1}{2^n}$; 7) $x_n = \frac{\sin n!}{0{,}01\sqrt{n}}$.

487. Пользуясь определением предела последовательности, доказать:

1) $a = \frac{1}{2}$ есть предел последовательности $x_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}$;

2) $a = -\frac{2}{3}$ есть предел последовательности $x_n = \frac{2n-1}{2-3n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1} = 1$.

488. Доказать, что следующие переменные величины бесконечно большие:

1) $x_n = n$; 2) $x_n = n^2$; 3) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$;

4) $x_n = 2^n$; 5) $x_n = \lg n$.

489. Написать последовательности значений переменных:

1) $x_n = \frac{n}{n+1}$; 2) $x_n = -\frac{n+1}{n}$; 3) $x_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$;

4) $x_n = (-1)^{n-1}$; 5) $x_n = \frac{n+1}{n^2}$; 6) $x_n = \sqrt{n}$.

Существует ли предел переменной в каждом примере при $n \to \infty$ и чему он равен?

490. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

Указание. Положить $x = 3 + \alpha$, где α — бесконечно малая, составить разность $x^2 - 9 = (3+\alpha)^2 - 9$ и показать, что она есть бесконечно малая величина.

491. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1) = 10$.

Указание. Положить $x = 3 + \alpha$.

492. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x} = 2$.

Указание. Надо показать, что разность $\frac{2x+3}{x} - 2$ при $x \to \infty$ есть бесконечно малая величина.

493. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-3x^2}{4x^2+1} = -\frac{3}{4}$.

При каких x значения функции будут отличаться от своего предела меньше чем на 0,001?

494. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+3}{2x-1} = 2$.

При каких x значения функции будут отличаться от своего предела меньше чем на 0,01?

495. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ не существует.

496. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует.

Указание. Возьмите последовательности $x_n=\frac{1}{\pi n}\to 0$ при $n\to\infty$ и $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to 0$ и проследите, будет ли функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ стремиться к одному и тому же пределу.

§ 6. Теоремы о бесконечно малых величинах и о пределах. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

1. Сумма конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть величина бесконечно малая.

3. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

4. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$, то имеют место следующие теоремы:

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm\varphi(x)]=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=AB$;

3) $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)]=c\lim f(x)=cA$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

497. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+7)$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-1}{2x^3+6x^2-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+3x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x+1}{x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^3+2x^2-x}{3x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$.

Решение. 1) Применяя теоремы о пределах, получаем $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+7)=3\lim\limits_{x\to 2}x\cdot\lim\limits_{x\to 2}x-2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}7=3\cdot 2\cdot 2-2\cdot 2+7=15.$

2) Пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю. Пользуясь теоремой о пределе частного, получаем

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-1}{2x^3+6x^2-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^3+6x^2-5)}=\frac{3\cdot 9-1}{2\cdot 27+6\cdot 9-5}=\frac{26}{103}.$$

3) Пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю.

Пользуясь теоремой о пределе частного, находим, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+3x-1}=\frac{0}{9}=0.$$

Полученный результат можно записать и так:

$$\frac{x-2}{x^2+3x-1}\to 0 \text{ при } x\to 2.$$

Следовательно, величина $\frac{x-2}{x^2+3x-1}$ есть бесконечно малая при $x\to 2$.

4) Непосредственно применять теорему о пределе частного нельзя, так как предел знаменателя равен нулю (в знаменателе есть бесконечно малая величина при $x\to 3$). В числителе имеем ограниченную величину, отличную от нуля. Таким образом, под знаком предела будет произведение ограниченной величины x^2-2x+1, отличной от нуля, на бесконечно большую величину $\frac{1}{x-3}$ при $x\to 3$ как величину, обратную бесконечно малой. Поэтому

$$\frac{x^2-2x+1}{x-3}\to\infty \text{ при } x\to 3.$$

Это можно записать и так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\infty.$$

Следовательно, величина $\frac{x^2-2x+1}{x-3}$ есть бесконечно большая при $x\to 3$.

5) В этом примере также нельзя непосредственно применять теорему о пределе частного, так как пределы знаменателя и числителя равны нулю и мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

В подобных примерах, когда в числителе и в знаменателе многочлены, их необходимо разложить на множители, после этого дробь сократить и затем перейти к пределу.

Сделаем это:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3+2x^2-x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(5x^2+2x-1)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+2x-1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Следует заметить, что x стремится к нулю, но не равен нулю, предел его равен нулю.

6) Здесь также неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{3}.$$

7) В этом примере неопределенность $\frac{0}{0}$.

Если под знаком предела имеется иррациональность, то для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ необходимо перенести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель, а иногда и то и другое, полученную дробь сократить и перейти к пределу

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{1+8x}-3)(\sqrt{1+8x}+3)(\sqrt{4x}+2)}{(\sqrt{4x}-2)(\sqrt{1+8x}+3)(\sqrt{4x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1+8x-9)(\sqrt{4x}+2)}{(\sqrt{1+8x}+3)(4x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{4x}+2)}{\sqrt{1+8x}+3}=\frac{4}{3}.$$

8) При $x\to 0$ переменная x есть бесконечно малая величина, а $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ при любых значениях $x\neq 0$. Следовательно, величина $x\sin\frac{1}{x}$ — произведение бесконечно малой на ограниченную величину — будет также бесконечно малой величиной, поэтому ее предел $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

9) Теорему о пределе частного здесь применять нельзя, так как числитель и знаменатель конечного предела не имеют. В этом случае говорят: имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. В подобных примерах для раскрытия неопределенности целесообразно числитель и знаменатель разделить на степень x с наивысшим показателем, а затем перейти к пределу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{5}.$$

10) Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель на n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Найти пределы:

498. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2+3x-4)$.

499. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{2x^3+x^2+3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+5x-1}$.

501. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-1}{x+3}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-x^2+x}{2x}$.

503. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-5x+4}$.

504. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1+n^{-2}}{n^2+1+n^{-2}}$.

505. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n^2+n+1}{n^3-n^2+n-1}$.

506. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100000\,n^3+600}{0{,}00001\,n^4}$.

507. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3n^2+4n^3}{n-3n^2+4n^3}$.

508. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

509. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

510. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+4+9+\ldots+n^2}$.

511. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-3}{5^{n+1}+2}$.

512. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+2x+12}$.

513. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-125}$.

514. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

515. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$.

516. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{2x}$.

517. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$.

518. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{9-x}}{\sqrt[4]{x^3+15}-2}$.

519. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

520. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+2}}$.

521. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}$.

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ часто применяется первый замечательный предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

где угол α выражен в радианах.

522. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$.

2) Преобразуем данное выражение так, чтобы задача была сведена к пределу (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{4}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{4}{5}.$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Найти пределы:

523. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$.

525. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2x}$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$.

527. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ $(\beta\neq 0)$.

528. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{x^2}$.

530. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

531. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

532. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

533. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

534. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$.

535. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

536. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sin x}-1}{x}$.

537. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}$.

§ 7. Раскрытие неопределенностей вида $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}

1. Неопределенности вида $\infty-\infty$ и $0\cdot\infty$ раскрываются путем преобразования и сведения их к неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

538. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. 1) Нетрудно видеть, что в этом примере мы имеем разность двух бесконечно больших положительных величин, т. е. неопределенность вида $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

2) Рассмотрим два случая:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Перенеся иррациональность из числителя в знаменатель, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0;$$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$.

3) Неопределенность вида $0\cdot\infty$ легко свести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Мы сведем к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\sin\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=x\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=x\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=x.$$

4) Неопределенность вида $0\cdot\infty$ сведем к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}=1\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

Здесь можно также произвести замену переменной, положив $1-x=t$, тогда $x=1-t$. Отсюда видно, что если $x\to 1$, то $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0} t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to 0} t\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}t=$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t} = \lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi}{2}t\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}t} = 1\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Найти пределы:

539. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

540. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

541. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+5}-x\right)$.

542. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

543. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-n^2}-n)$.

544. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt[3]{x^3-x})$.

545. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

546. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{x}$.

547. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot 2^{-n}$.

548. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

549. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)$.

550. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+n}-n^2)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

2. Пусть функция имеет такой вид:

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Если при $x\to a\,(x\to\infty)$ $f(x)\to 1$, а $\varphi(x)\to\infty$, то говорят, что имеем неопределенность вида 1^∞. Для раскрытия этой неопределенности пользуются вторым замечательным пределом

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \qquad (1)$$

Число e иррациональное ($e = 2{,}71828\ldots$). Известно, что если между действительными числами $a\,(a>0,\ a\neq 1)$, x, y имеет место соотношение

$$a^y = x,$$

то число y называют *логарифмом* числа x по основанию a и пишут $y = \log_a x$. Если $a = e$, то логарифмы называют *нату-*

ральными и пишут $y = \ln x$, если $a = 10$, то логарифмы называют *десятичными*, и в этом случае принято писать так: $y = \lg x$. От натуральных логарифмов легко перейти к десятичным и, наоборот, воспользовавшись формулами

$$\lg x = M \ln x; \quad \ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

где $M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e = 0{,}43429...$ называется *модулем перехода*. Обратная величина модуля

$$\frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}30258...$$

552. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Каждое из данных выражений под знаком предела преобразуем так, чтобы задача сводилась ко второму замечательному пределу.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{\frac{a}{x}\cdot x} = e^a$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, где $\alpha = \frac{a}{x}$, а показатель степени $\frac{a}{x}\cdot x = a$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n+2}-1\right)^{2n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{n+2}\cdot(2n+1)} =$

$= e^{-6} = \frac{1}{e^6}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-3}} = e$ по формуле (1) и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3(2n+1)}{n+2} = -6$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{3x\cdot\frac{1}{x}} = e^3$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, где $\alpha = 3x$, а показатель степени $3x\cdot\frac{1}{x} = 3$.

4) Здесь также неопределенность вида 1^{∞}:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{[1+(-2\sin^2 x)]^{\frac{-1}{2\sin^2 x}}\right\}^{\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Мы воспользовались формулой $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ и вторым замечательным пределом.

Найти пределы:

553. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

555. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

556. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

557. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^{2n+1}$.

558. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-3x}{1-2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

560. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

561. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}}$.

562. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

563. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}$.

564. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{7x+3}{9x+3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

565. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+3x}{2+5x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

566. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6-x}{7-x}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}$

267. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

568. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

§ 8. Смешанные задачи на вычисление пределов

Найти следующие пределы:

569. 1) $\lim\limits_{t\to 1}\frac{t(t-1)}{2(t^2-1)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

570. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

571. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

572. 1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cdot\cos x}$.

573. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[4]{2x-3}}$.

574. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x^4+x^2+1)}{\ln(3x^2+x-1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lg(8x^7-6x^5+1)}{\lg(3x^{10}+x^9-1)}$.

575. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

576. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{2}{2x-\pi}\right)$.

577. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\operatorname{ctg}3x$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$.

578. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{\cos 2x}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

579. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\cos\dfrac{\varphi}{x}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

580. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$.

§ 9. Сравнение бесконечно малых величин

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые величины при $x\to a$ (a — конечное число или $a=\infty$).

1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, то бесконечно малая β будет более высокого порядка, чем α.

2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$, то бесконечно малая β будет более низкого порядка, чем α.

3. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=c$ (конечен и не равен 0), то бесконечно малые α и β считаются величинами одного порядка.

4. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=1$, то бесконечно малые α и β называются *эквивалентными*, в этом случае пишут: $\alpha\sim\beta$.

Если бесконечно малые α и β эквивалентны, то разность $\alpha-\beta=\gamma$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из бесконечно малых α и β.

5. Вычисление предела отношения бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$ $\left(\text{неопределенность вида } \frac{0}{0}\right)$ очень часто можно значительно упростить, воспользовавшись теоремой: если $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta_1}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha_1}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, т. е. предел отношения бесконечно малых величин не изменяется при замене их эквивалентными им бесконечно малыми величинами.

581. Доказать, что при $\alpha\to 0$:

1) $\sin\alpha\sim\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$; 3) $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$; 4) $\arcsin\alpha\sim\alpha$;
5) $\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$; 6) $\sqrt{1+\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{2}$.

Решение. 1) $\sin\alpha\sim\alpha$, так как известно, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

2) $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$, так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha}=1$.

3) $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=$
$=\ln e=1$.

4) Полагая $\arcsin\alpha=\varphi$, находим $\sin\varphi=\alpha$ и

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}=1.$$

5) Полагая $\operatorname{arctg}\alpha=\varphi$, получаем $\operatorname{tg}\varphi=\alpha$ и

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}=1.$$

6) $\sqrt{1+\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{2}$, так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha}-1}{\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2(\sqrt{1+\alpha}-1)(\sqrt{1+\alpha}+1)}{\alpha(\sqrt{1+\alpha}+1)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+\alpha}+1}=1.$$

582. Пользуясь теоремой 5 данного параграфа, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{7x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\arcsin 2x}$.

Решение. 1) $\sin 3x \sim 3x$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x} = \dfrac{3}{5}$. Бесконечно малые величины $\beta = \sin 3x$ и $\alpha = 5x$ одного и того же порядка.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{5x} = \dfrac{9}{5}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{3}{2}$.

Таким образом, бесконечно малая $\beta = \cos x - \cos 2x$ есть величина второго порядка по сравнению с бесконечно малой $\alpha = x$.

4) $\operatorname{tg} px \sim px$, $\operatorname{tg} qx \sim qx$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx} = \lim_{x\to 0}\frac{px}{qx} = \frac{p}{q}.$$

5) $\ln(1+3x) \sim 3x$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}.$$

6) $\arcsin 5x \sim 5x$, $\arcsin 2x \sim 2x$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\arcsin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

583. Доказать, что при $x \to 0$:

1) $\sqrt{1+4x} - 1 \sim 2x$; 2) $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{3}$;

3) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$; 4) $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$.

584. Пользуясь теоремой 5 и результатами задачи 581, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x\cdot\sin 3x}{x^2+x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\ln(1+x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 6x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$; 8) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin 2\alpha\operatorname{arctg} 5\alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha\arcsin 4\alpha}$.

§ 10. Односторонние пределы

Если $x < a$ и $x \to a$, то принято писать $x \to a - 0$. Если $x > a$ и $x \to a$, то пишут $x \to a + 0$. Пределы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0)$ (если они существуют) называют соответственно *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a и *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a.

Для существования предела («двустороннего») функции $f(x)$ в точке a ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$) необходимо и достаточно, чтобы односторонние пределы существовали порознь и равнялись бы между собой, т. е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ (см. § 5, п. 5, а).

585. Найти односторонние пределы функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} \quad (x \neq 1) \text{ при } x \to 1.$$

Решение. $f(1 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 1+0 \\ (x>1)}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{z \to +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2}$,

где $z = \frac{1}{x-1}$; отсюда видно, что если $x \to 1 + 0$, то $z \to +\infty$.

$$f(1 - 0) = \lim_{\substack{x \to 1-0 \\ (x<1)}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \lim_{z \to -\infty} \operatorname{arctg} z = -\frac{\pi}{2}.$$

Пределы оказались неравными, следовательно, предела функции в точке $a = 1$ не существует.

586. Найти пределы справа и слева функции

$$f(x) = \frac{1}{5 + 3^{\frac{1}{x}}} \quad (x \neq 0) \text{ при } x \to 0.$$

Решение. $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{5 + 3^{\frac{1}{x}}} = 0$,

так как

$$\lim_{x \to +0} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to +\infty} 3^z = +\infty;$$

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{1}{5 + 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{5},$$

так как

$$\lim_{x \to -0} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to -\infty} 3^z = 0.$$

Пределы оказались неравными, следовательно, предела функции в точке $a = 0$ не существует.

Найти следующие односторонние пределы:

587. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{|x|}$.

588. $\lim\limits_{x\to-0}\frac{x}{|x|}$.

589. $\lim\limits_{x\to1+0}e^{\frac{1}{x-1}}$.

590. $\lim\limits_{x\to1-0}e^{\frac{1}{x-1}}$.

591. $\lim\limits_{x\to-0}\sqrt{\sin x}$.

592. $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{\sin x}$.

593. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{при } x\leqslant 2,\\ 2x+1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти $f(2+0)$; $f(2-0)$.

594. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{при } x<3,\\ x+6 & \text{при } x\geqslant 3.\end{cases}$$

Найти $f(3+0)$; $f(3-0)$.

§ 11. Непрерывность и точки разрыва функции

1. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке X и точка x_0 принадлежит этому промежутку, следовательно, функция в указанной точке имеет определенное значение $f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Определение непрерывности функции можно дать в других терминах.

Напишем приращение функции в точке x_0:

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Пусть функция в точке x_0 непрерывна, тогда по условию (1) имеем:

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

или

$$\lim_{x\to x_0}\Delta y=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0, \tag{2}$$

т. е. если функция непрерывна в точке x_0, то бесконечно малому приращению аргумента Δx в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции Δy. Справедливо и обратное предложение: если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то функция непрерывна, так как в этом случае из соотношения (2) следует предел (1). Следовательно, для того чтобы фунция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы

ее приращение Δy в этой точке стремилось к нулю вместе с приращением аргумента Δx.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной* в этой области.

2. Если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой же точке непрерывны и функции $f(x) + \varphi(x)$; $f(x) - \varphi(x)$; $f(x) \cdot \varphi(x)$; $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (последняя при $\varphi(x_0) \neq 0$).

Если функция $y = f(u)$ непрерывна в интервале (A, B), а функция $u = \varphi(x)$, значения которой содержатся в интервале (A, B), непрерывна в интервале (a, b), то и сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в интервале (a, b).

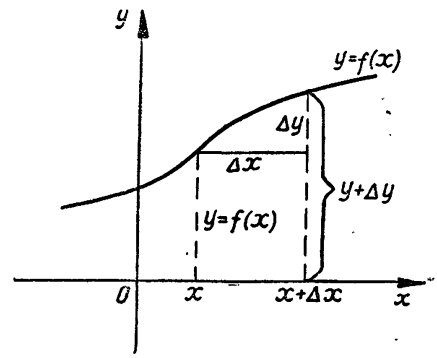


Рис. 56

Заметим, что если функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) в промежутке X, а множество ее значений — промежуток Y, то для данной функции существует обратная однозначная функция $x = \varphi(y)$ в промежутке Y также непрерывная, возрастающая (убывающая) и удовлетворяющая для всех значений y из Y условию $y = f[\varphi(y)]$.

3. Если условие непрерывности (1) функции в точке x_0 не выполнено, то функция имеет разрыв в этой точке.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 первого рода, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, причем: 1) $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$; 2) $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$.

В последнем случае x_0 называется *устранимой точкой разрыва*.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке не существует либо равен бесконечности.

Если $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$, то разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции* в точке x_0.

595. Пользуясь определением непрерывности функции, доказать, что: 1) функция $f(x) = x^2 + 3$ непрерывна в точке $x = 2$; 2) функция $f(x) = \frac{1}{x - 5}$ $(x \neq 5)$ непрерывна в точке $x = 3$.

Решение. 1) Воспользуемся определением п. 1: функция $f(x)$ непрерывна в точке x, если бесконечно малому при-

ращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$ (рис. 56).

Найдем значение функции в точке $x = 2$: $f(2) = 7$ (начальное значение функции); $f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 + 3 = 7 + 4\Delta x + \Delta x^2$ (новое значение функции); $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = 4\Delta x + \Delta x^2$, отсюда следует, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$. Непрерывность данной функции в точке $x = 2$ доказана.

2) $f(3) = -\frac{1}{2}$; $f(3 + \Delta x) = \frac{1}{3 + \Delta x - 5}$; $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = \frac{1}{\Delta x - 2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2(\Delta x - 2)}$; отсюда следует, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$. Непрерывность функции в точке $x = 3$ доказана.

596. Доказать, что каждая из следующих функций: 1) $y = c$; 2) $y = x$; 3) $y = \sin x$; 4) $y = \cos x$; 5) $y = \operatorname{tg} x$; 6) $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна в своей области определения.

Решение. 1) Функция $y = c$ ($c = \text{const}$) определена в интервале $(-\infty, +\infty)$. Дадим приращение аргументу в произвольной точке x. Получим приращение функции: $y = c$ (начальное значение функции), $y + \Delta y = c$ (новое значение функции), отсюда $\Delta y = 0$.

Таким образом, бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции ($\Delta y = 0$). Непрерывность функции доказана в произвольной точке x и этим самым доказана непрерывность во всем промежутке.

2) Функция $y = x$ определена в интервале $(-\infty, +\infty)$. Дадим приращение аргументу Δx в произвольной фиксированной точке x_0, тогда и функция получит приращение Δy, а именно

$$y_0 = x_0, \quad y_0 + \Delta y = x_0 + \Delta x.$$

Отсюда $\Delta y = \Delta x$. Теперь ясно, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

3) Функция $y = \sin x$ определена в интервале $(-\infty, +\infty)$. Аналогично дадим аргументу в произвольной точке x приращение Δx, тогда и функция получит приращение Δy:

$$y = \sin x, \quad y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

Отсюда

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left|2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| =$$

$$= \left|2 \sin \frac{\Delta x}{2}\right| \cdot \left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| 1 = |\Delta x|$$

(из теоретического курса известно, что $|\sin x| \leqslant |x|$). Теперь ясно, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

4) Функция определена в интервале $(-\infty, +\infty)$. Дадим аргументу x приращение Δx, получим

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) \text{ и } y = \cos x.$$

Отсюда

$$|\Delta y| = |\cos(x+\Delta x) - \cos x| =$$
$$= \left| -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|.$$

Следовательно, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Непрерывность функции доказана в произвольной точке x интервала $(-\infty, +\infty)$, этим самым доказана непрерывность функции в этом интервале.

Докажем непрерывность функции иначе: $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Функция $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ есть сложная функция, ее можно представить так: $y = \sin u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$. Функция $u = \frac{\pi}{2} - x$ непрерывна как алгебраическая сумма непрерывных функций (см. п. 2); $y = \sin u$ непрерывна по доказанному для функции 3, следовательно, функция $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ также непрерывна как непрерывная функция от непрерывной функции.

4) — 5) Функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны в промежутке $(-\infty, +\infty)$ как отношение двух непрерывных функций, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = \pi n$ $(n = 0, \pm 1; \pm 2; \ldots)$, в которых функции соответственно не определены и имеют разрыв второго рода.

Например, точка $x = \frac{\pi}{2}$ $(n = 0)$ есть точка разрыва второго рода функции $\operatorname{tg} x$, так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$ и $x = 0$ — точка разрыва второго рода функции $\operatorname{ctg} x$, так как $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$. Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi$ $(n = 1)$ и $x = \pi$ — точки разрыва второго рода функции соответственно $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ и т. д.

В теоретическом курсе доказывается, что все основные элементарные функции непрерывны во всех точках области их определения. Поэтому, учитывая теоремы п. 2, можем утверждать, что каждая элементарная функция в области ее определения непрерывна, т. е. область определения элементарной функции совпадает с областью ее непрерывности. Отсюда, чтобы найти предел элементарной функции $f(x)$ в точке x_0, принадлежащей области определения функции, надо найти частное значение функции в этой точке. Отсюда

также следует, что точками разрыва элементарной функции, очевидно, могут быть те точки, в которых функция не определена, но определена вблизи них.

Если функция неэлементарная, то ее точками разрыва также могут быть те точки, в которых она не определена, если же функция задана несколькими разными формулами на различных промежутках изменения аргумента, то точками ее разрыва могут быть те, в которых меняется аналитическое выражение функции.

597. Пользуясь свойствами непрерывных функций, доказать непрерывность при любом x следующих функций:

1) $f(x) = x^4 + 3x + 5$; 2) $f(x) = x^2 \sin x - \frac{x^2}{x^2+3}$.

Решение. 1) Функция непрерывна в каждой точке x, так как состоит из суммы непрерывных функций (см. п. 2). Функция x^4 непрерывна как произведение непрерывных функций $xxxx = x^4$. Функция $3x$ также непрерывна как произведение двух непрерывных функций. Третье слагаемое 5 есть постоянное.

2) Функция непрерывна в каждой точке x как разность двух непрерывных функций. В самом деле, функция $x^2 \sin x$ непрерывна как произведение двух непрерывных функций, а функция $\frac{x^2}{x^2+3}$ непрерывна как частное двух непрерывных функций, причем знаменатель не равен нулю, так как уравнение $x^2+3 = 0$ действительных корней не имеет.

598. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{5x^2+3x-4}{x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x^2+3x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{\sin x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x$.

Решение. 1) Функция элементарная, определена и непрерывна при любых значениях $x \neq \pm 1$. Следовательно, она непрерывна в точке $x = 2$ и поэтому

$$\lim_{x\to 2} \frac{5x^2+3x-4}{x^2-1} = \frac{5\cdot 2^2+3\cdot 2-4}{2^2-1} = \frac{22}{7}.$$

2) Точка $x = 3$ принадлежит области определения данной элементарной функции, поэтому функция непрерывна в точке $x = 3$, следовательно,

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{3^2+3\cdot 3-4} = \sqrt{14}.$$

3) Функция элементарная и определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е, она непрерывна в любой точке этого интервала и в частности в точке $x = \frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\sin x+1} = e^{\sin\frac{\pi}{2}+1} = e^2.$$

4) Аналогично

$$\lim_{x\to 0}\cos^2 x = \cos^2 0 = 1.$$

599. Исследовать на непрерывность функции:

1) $y = \frac{1}{x^2+4}$; 2) $y = \frac{1}{x^2-4}$; 3) $y = \frac{x+3}{x-1}$;

4) $y = \cos 3x$; 5) $y = \frac{x^2-9}{x^2-2x+4}$; 6) $y = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Решение. 1) Функция элементарная, определена и непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$.

2) Функция алгебраическая, дробная, определена на всем множестве действительных чисел, за исключением точек, в которых знаменатель дроби равен нулю: $x^2-4=0$, отсюда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. В этих точках функция имеет разрыв второго рода. Убедимся в этом:

$$\lim_{\substack{x\to 2+0\\(x>2)}} \frac{1}{x^2-4} = +\infty,$$

так как при $x\to 2+0$ знаменатель $\alpha = x^2-4 > 0$ есть бесконечно малая величина; следовательно, обратная величина $\frac{1}{x^2-4}$ бесконечно большая величина, т. е. стремится к бесконечности.

Аналогично находим предел

$$\lim_{\substack{x\to 2-0\\(x<2)}} \frac{1}{x^2-4} = -\infty.$$

В этом случае бесконечно малая величина $\alpha = x^2-4 < 0$, обратная ей величина есть бесконечно большая величина.

3) Функция определена на всей числовой прямой, за исключением точки $x=1$, в которой знаменатель данной дробно-линейной функции равен нулю. В этой точке разрыв второго рода, так как

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x+3}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-0}\frac{x+3}{x-1} = -\infty.$$

4) Функция элементарная (сложная), определена и непрерывна в интервале $(-\infty; +\infty)$.

5) Функция алгебраическая, дробная, определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Заметим, что трехчлен знаменателя дроби имеет комплексные корни, следовательно, при

любых значениях x он не равен нулю. В данном случае $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$ при любых x.

6) Функция неэлементарная, задана двумя формулами, определена на всем множестве действительных чисел, имеет разрыв в точке $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует (см. задачу 496).

600. Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

1) $f(x)=\begin{cases}3x & \text{при } x\neq 2,\\ 1 & \text{при } x=2;\end{cases}$ 2) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$;

3) $\varphi(x)=\begin{cases}x^2 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x+1 & \text{при } x>0;\end{cases}$

4) $\psi(x)=\begin{cases}x+1{,}5 & \text{при } x<-2,\\ \frac{1}{x} & \text{при } -2\leqslant x<0,\\ 2x & \text{при } x\geqslant 0;\end{cases}$ 5) $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$.

Решение. 1) Функция определена на всей числовой прямой, неэлементарная, так как задана двумя различными формулами. При переходе в точку $x=2$ аналитическое выражение функции меняется. Поэтому исследуем непрерывность функции в точке $x=2$. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 2+0}3x=\lim\limits_{x\to 2-0}3x=6$, следовательно, $f(2+0)=f(2-0)\neq f(2)$, где $f(2)=1$ по условию.

Итак, в точке $x=2$ имеем устранимый разрыв, во всех остальных точках числовой прямой функция непрерывна. График функции состоит из двух ветвей и одной точки (рис. 57, *а*).

2) Функция элементарная, определена на всем множестве действительных чисел, за исключением точки $x=4$, следовательно, в этой точке функция имеет разрыв. Нетрудно видеть, что в точке $x=4$ предел справа равен пределу слева $f(4+0)=f(4-0)$, так как

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8.$$

Таким образом, в точке $x=4$ функция имеет устранимый разрыв (рис. 57, *б*). Если эту функцию доопределить в точке $x=4$, положив $f(4)=8$, то функция будет непрерывной на всей числовой прямой.

3) Функция $\varphi(x)$ неэлементарная, определена на всей числовой прямой. В точке $x=0$ аналитическое выражение функции изменяется, следовательно, в этой точке функция может иметь разрыв. Исследуем непрерывность функции в точке $x=0$. Найдем предел функции слева в точке $x=0$:

$$\varphi(-0)=\lim_{x\to -0}\varphi(x)=\lim_{x\to -0}x^2=0.$$

Теперь найдем предел справа в этой же точке:

$$\varphi(+0) = \lim_{\substack{x \to +0 \\ (x>0)}} \varphi(x) = \lim_{x \to +0} (x+1) = 1,$$

отсюда $\varphi(-0) \neq \varphi(+0)$.

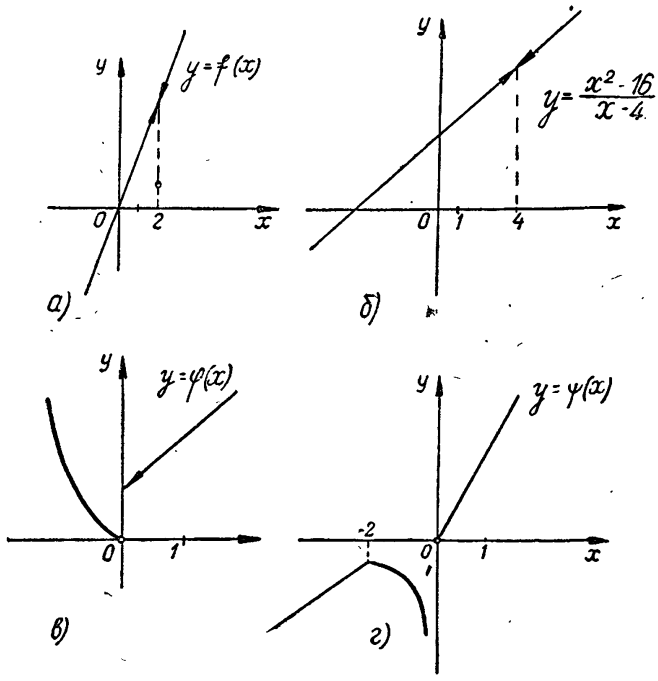


Рис. 57

Следовательно, в точке $x = 0$ функция $\varphi(x)$ имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке $x = 0$ равен разности (рис. 57, *в*).

$$\varphi(+0) - \varphi(-0) = 1 - 0 = 1.$$

Во всех остальных точках числовой прямой функция $\varphi(x)$ непрерывна, так как обе формулы, которыми она задана, определяют элементарные (алгебраические) непрерывные функции.

4) Функция $\psi(x)$ неэлементарная, определена на всем множестве действительных чисел, задана разными тремя формулами на различных промежутках изменения аргумента.

Исследуем непрерывность функции в точках $x = -2$ и $x = 0$:

$\psi(-2-0) = \lim\limits_{x \to -2-0} (x+1{,}5) = -0{,}5$; $\psi(-2+0) = \lim\limits_{x \to -2+0} \frac{1}{x} = -0{,}5$.

По условию $\psi(-2) = -0{,}5$, следовательно, $\psi(-2-0) =$

$= \psi(-2+0) = \psi(-2)$, т. е. функция $\psi(x)$ непрерывна в точке $x = -2$:

$$\psi(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Таким образом, в точке $x = 0$ функция имеет разрыв второго рода (рис. 57, *г*). В остальных точках числовой оси функция непрерывна.

5) Функция элементарная, определена на всей числовой прямой, кроме точки $x = 1$. Исследуем непрерывность функции в этой точке:

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} \frac{|x-1|}{x-1} = -1,$$

так как при любых значениях $x \neq 1$ числитель равен абсолютной величине знаменателя, а знаки их различные.

Найдем предел справа:

$$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} \frac{|x-1|}{x-1} = 1.$$

Следовательно, функция в точке $x = 1$ имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен разности

$$f(1+0) - f(1-0) = 1 - (-1) = 2.$$

601. Пользуясь определением непрерывности функции, доказать:

1) функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 0$;

2) функция $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$ непрерывна в точке $x = -2$;

3) функция $\psi(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в точке $x = 4$;

4) функция $f(x) = \cos x$ непрерывна в точке $x = 0$.

602. Доказать, что каждая из следующих функций:

1) $y = \sqrt{x-5}$; 2) $f(x) = \sin 3x$; 3) $\varphi(x) = \frac{1}{x^2-9}$;

4) $y = x^3 - 5x$; 5) $y = \lg(x^2 + 2x + 3)$

непрерывна в своей области определения.

603. Пользуясь определением непрерывности функции и свойствами непрерывных функций, доказать непрерывность следующих функций при любом x:

1) $y = x^{100} - \sin(x^2 - 3x - 1)$; 2) $y = \frac{x^2+6x-1}{x^4+x^2+2} + \operatorname{tg} \sin x$;

3) $y = x^3 \cos(1 + x + x^2)$; 4) $y = \frac{x-1}{x^2+1} e^{x-\operatorname{arctg} x}$;

5) $y = 2^{-x} \cos \frac{x^3+2}{|x|+1} - \frac{x^5+7x-3}{3^x+3^{-x}}$.

604. Найти пределы:

1) $\lim_{x \to -2} \frac{5x+x+12}{x^2+4}$; 2) $\lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{t^2+3}}{t^2-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \sin \lg (3x+4)$; 4) $\lim\limits_{\varphi\to 0} e^{\cos\varphi - 1}$;

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x+1}$.

605. Исследовать на непрерывность функции:

1) $y = \frac{\sqrt{|x|+1}-2}{x^2-3}$; 2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$;

3) $v = \frac{x+1}{x^2-2x-3}$; 4) $y = \cos\frac{1}{x}$;

5) $u = \frac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}$; 6) $\varphi(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$;

7) $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

606. Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

1) $y = \frac{|x|}{x}$; 2) $y = \begin{cases} 1-x, & x > 2, \\ 1+x, & x \leqslant 2; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x, & x \geqslant -1; \\ -x, & x < -1; \end{cases}$ 4) $y = |x-2|$;

5) $y = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 1, \\ 3x, & x \geqslant 1; \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} 2x+3, & x \leqslant 3, \\ 1-x^2, & x > 3; \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 1, \\ 2x^2, & x < 1; \end{cases}$ 8) $y = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 2, \\ 2^{-x}, & x < 2; \end{cases}$

9) $y = \begin{cases} 3-x, & x \geqslant -3, \\ e^x, & x < -3; \end{cases}$ 10) $y = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 2x, & x \geqslant 0; \end{cases}$

11) $y = \lg|x|$; 12) $y = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$

Глава V Производная и дифференциал функции

§ 1. Производная функция, ее механический и геометрический смысл. Непосредственное нахождение производной

1. *Производной функцией* $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Если существует конечный предел (1) в точке x (т. е. существует конечная производная в точке x), то функция называется дифференцируемой в этой точке.

Производная обозначается y' или $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$, или $\frac{df(x)}{dx}$.

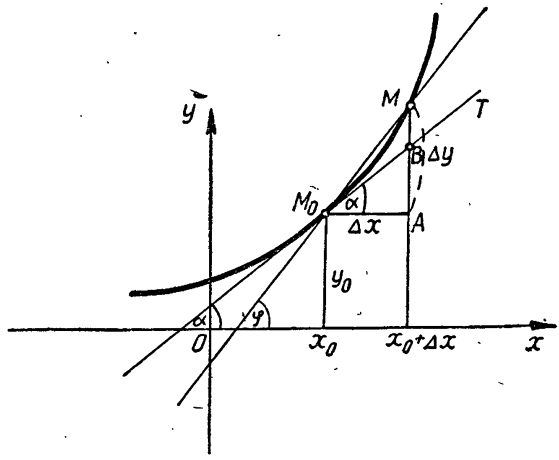


Рис. 58

Нахождение производной называют *дифференцированием* функции. Значение производной функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ обозначают $f'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$.

2. В механике производная от пройденного пути s по времени t есть скорость v.

Пусть точка движется прямолинейно по закону $s=f(t)$, где s — пройденный путь за время t. Тогда скорость v движения точки в момент времени t_0 определяется по формуле

$$v=s'(t_0). \qquad (2)$$

В геометрии производная функции $y=f(x)$ есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции (рис. 58).

Как видно (см. рис. 58),

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где φ — угол наклона секущей M_0M, и

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0), \qquad (3)$$

где $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной M_0T к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$. Заметим, что если каса-

тельная параллельна оси Ox, то угол ее наклона α с положительным направлением оси Ox равен нулю, и тогда $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 0$.

Если касательная в точке $M_0(x_0; y_0)$ параллельна оси Oy, то $\alpha = 90°$ и тогда $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \infty$. Заметим также, что если в точке x_0 существует конечная производная, то функция непрерывна в этой точке. Обратное предложение не всегда справедливо. Например, функция $y = |x|$ (рис. 59) в точке $x = 0$ непрерывна, так как приращение функции $\Delta y = |x + \Delta x| - |x|$ и в точке $x = 0$ $\Delta y = |\Delta x|$, стало быть, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а производной в этой точке функция не имеет. Убедимся в этом:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

не существует, так как

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1; \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Следовательно, предел справа в точке $x = 0$ не равен пределу слева, т. е. предел (1) в точке $x = 0$ не существует, это и означает, что функция в данной точке производной не имеет.

Если существуют односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ и } \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

не равные между собой, то говорят, что существуют односторонние производные функции в точке x_0, а точку x_0 называют угловой точкой графика функции. В приведенном примере односторонние производные (справа и слева) в точке $x = 0$ существуют.

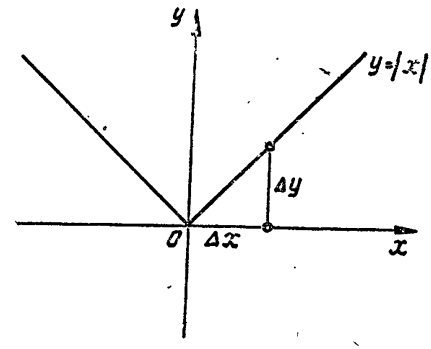


Рис. 59

3. Пользуясь определением производной, можно найти производную (непосредственное нахождение производной). Для этого надо:

1) дать аргументу x произвольное приращение Δx и найти соответствующее новое значение функции $y + \Delta y$;
2) определить приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta y) - f(x)$;
3) составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
4) найти придел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$;

607. Точка движется по прямой, согласно закону $s=3t^2+2t$, где t — время в секундах, s — путь в метрах. Найти скорость точки в моменты $t=3$ и $t=4$.

Решение. Руководствуясь п. 3, последовательно находим:

1) $s+\Delta s=3(t+\Delta t)^2+2(t+\Delta t)$;

2) $\Delta s=3(t+\Delta t)^2+2(t+\Delta t)-(3t^2+2t)=6t\Delta t+2\Delta t+3\Delta t^2$;

3) $v_{ср}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\Delta t(6t+2+3\Delta t)}{\Delta t}=6t+2+3\Delta t$

(средняя скорость за промежуток времени Δt от t до $(t+\Delta t)$;

4) теперь найдем скорость в момент времени t:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(6t+2+3\Delta t)=6t+2;$$

в частности, при $t=3$ $v=20$ (*м/сек*), при $t=4$ $v=26$ (*м/сек*).

608. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

1) $y=3x+5$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в точке $x=2$;

3) $f(x)=\sin(2x-3)$ в точке $x=1$.

Решение. 1) Дадим аргументу x приращение Δx, тогда получим новое значение функции

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)+5.$$

Вычтем из этого равенства начальное значение функции 1. Получим приращение функции $\Delta y=3\Delta x$. Теперь найдем предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3,$$

т. е. $y'=3$.

2) Вычисляем приращение функции в точке x:

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Находим предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\cdot\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2},$$

т. е. $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. Производная в точке $x=2$ равна $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$.

3) $\Delta y=\sin[2(x+\Delta x)-3]-\sin(2x-3)=2\sin\Delta x\cos(2x-3+\Delta x)$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cos(2x-3+\Delta x)\to 2\cos(2x-3)\text{ при }\Delta x\to 0,$$

т. е. $f'(x)=2\cos(2x-3)$. Производная в точке $x=1$ равна $f'(1)=2\cos(-1)=2\cos 1\approx 2\cos 57°18'\approx 2\cdot 0{,}5402=1{,}0804$.

609. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $f(x)=x^2+4$: 1) в точке (2; 0); 2) в точке (0; −4); 3) в точке (3; 5).

Решение. Сначала найдем производную в точке x:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 + 4 - (x^2+4) = 2x\Delta x + \Delta x^2;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2x+\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x,$$

т. е. $f'(x) = 2x$.

Угловые коэффициенты искомых касательных к данной кривой в указанных точках равны значениям производной соответственно при $x=2$, $x=0$ и $x=3$, т. е.

$$f'(2) = 2\cdot 2 = 4;\ f'(0) = 2\cdot 0 = 0;\ f'(3) = 2\cdot 3 = 6.$$

610. Определить приращение функции $y = x^2 + x + 1$ в точке $x_0 = 1$, если $\Delta x = 1$; $\Delta x = -0{,}5$.

611. Определить приращение функции $y = \sin x$ в точке $x_0 = \pi$, полагая приращение Δx равным: 1) π; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$.

612. Найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

1) $y = x^2$ при $x_0 = 1$ и Δx равным 1; 0,1; 0,01;
2) $y = 6x + 5$ при $x_0 = 2$ и Δx равным 1; 0,1; 0,01.

613. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

1) $y = 2$; 2) $y = \sin x$;
3) $y = 7x^2$; 4) $y = \sqrt{x}$;
5) $y = 3x + \sqrt{2}$; 6) $y = \cos x$.

614. Показать, что следующие функции не имеют конечных производных в указанных точках:

1) $y = \sqrt[5]{x}$ в точке $x = 0$;
2) $y = \sqrt[3]{x-2}$ в точке $x = 2$.

615. Вычислить $\varphi'(0{,}1)$, $\varphi'(-2)$, если $\varphi(x) = \frac{2}{x}$.

616. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = 0$, $f(0) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$, то чему равен последний?

617. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$: 1) в начале координат; 2) в точке (1; 1); 3) в точке (−2; 4).

618. В какой точке касательная к кубической параболе $y = x^3$: 1) параллельна оси Ox; 2) образует с осью Ox угол 30°, 45°?

619. Точка движется по прямой Ox, согласно закону $x = x(t)$. Какой физический смысл имеет в этом случае отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$?

620. Какова средняя скорость изменения функции $y = x^2$ в промежутке $2 \leqslant x \leqslant 5$?

621. Тело движется вдоль прямой Os по закону $s = t + \sin t$, где расстояние s дано в метрах, а время t — в секундах. Найти скорость движения при $t = \frac{\pi}{2}$.

622. Свободно падающее тело (в пустоте) движется по закону $s = \frac{gt^2}{2}$, где g (≈ 980 *см/сек*^{2}) есть ускорение свободного падения. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t_0 = 10$ *сек* до $(t_0 + \Delta t)$ *сек*, полагая $\Delta t = 1$ *сек* и скорость падения в момент времени: 1) $t = 10$; 2) $t = 12$ *сек*.

§ 2. Производные основных элементарных функций. Производная суммы, произведения и частного функций

1. Таблица производных основных элементарных функций:

$$(c)' = 0 \quad (c = \text{const}); \tag{1}$$

$$(x)' = 1; \tag{2}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha = \text{const}); \tag{3}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x; \tag{4}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}; \tag{5}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{6}$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \tag{7}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{8}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \tag{9}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{10}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{11}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}; \tag{12}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{13}$$

2. Приведем основные правила нахождение производных. Если функции $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ и $w = \psi(x)$ имеют конечные производные u', v' и w' в некоторой точке x, то справедливы следующие правила:

I. $(cu)' = cu'$ $(c = \text{const})$.

II. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$.

III. $(uv)' = u'v + uv'$.

IV. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

V. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

623. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, если $f(x) = 2x^3 + 4x - 5$.

Решение. Сначала найдем производную в общем виде. По правилу II, а затем I будем иметь

$$f'(x) = (2x^3)' + (4x)' - (5)' = 2(x^3)' + 4(x)' - (5)'.$$

Воспользовавшись формулами производных (1), (2), (3), окончательно получим*

$$f'(x) = 6x^2 + 4.$$

Теперь найдем значения производной в указанных точках:

$$f'(0) = 4; \qquad f'(1) = 10; \qquad f'(2) = 28.$$

624. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y = x^{\frac{5}{6}} + 7$; 2) $y = \frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} + 2\sqrt[6]{x^5}$;

3) $y = x^3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 0{,}1x^{10}$; 4) $y = (2x^3 + \sqrt{5})\,7^x$;

5) $y = \frac{x}{2 - \cos x} - \frac{x^3}{\sqrt{7}}$; 6) $y = \frac{5}{\sin x} + \frac{\ln x}{x^2}$.

Решение. 1) $y' = (x^{\frac{5}{6}})' + (7)' = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}$ [II; (3), (1)].

2) $y' = (3x^{\frac{13}{5}})' - (9x^{-\frac{2}{3}})' + (2x^{\frac{5}{6}})' = \frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}} + \frac{18}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{6}} = 7\frac{4}{5}x^{\frac{8}{5}} + 6x^{-\frac{5}{3}} + 1\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{6}}$ [II, I; (3)].

3) Перейдем к дробным показателям:

$$y = x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + 0{,}1x^{10};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + x^9$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + x^9 \text{ [I; II; (3)]}.$$

4) $y' = (2x^3 + \sqrt{5})' \cdot 7^x + (2x^3 + \sqrt{5})\,(7^x)' = 6x^2 7^x + (2x^3 + \sqrt{5}) \cdot 7^x \ln 7 = [6x^2 + (2x^3 + \sqrt{5})\ln 7]\,7^x$ [III, II, I; (1), (3), (4)].

5) $y' = \left(\frac{x}{2 - \cos x}\right)' - \left(\frac{x^3}{\sqrt{7}}\right)' = \frac{(x)'(2 - \cos x) - x(2 - \cos x)'}{(2 - \cos x)^2} - \frac{1}{\sqrt{7}}(x^3)' = \frac{2 - \cos x - x\sin x}{(2 - \cos x)^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{7}}$ [II, IV, I, II; (2), (1), (7), (3)].

6) $y' = \left(\frac{5}{\sin x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = -\frac{5(\sin x)'}{(\sin x)^2} +$

* В дальнейшем в скобках будем указывать номера формул и правил, которыми мы воспользовались.

$$+\frac{x^2(\ln x)' - (x^2)'\ln x}{(x^2)^2} = -\frac{5\cos x}{\sin^2 x} + \frac{x^2\frac{1}{x} - 2x\ln x}{x^4} =$$

$$= -5\cos x \csc^2 x + \frac{1-2\ln x}{x^3}$$ [II, V, IV; (6), (5), (3)].

625. Найти производную функцию $y = x\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

Решение. $y' = (x\operatorname{tg} x)' + (\operatorname{ctg} x)' = (x)'\operatorname{tg} x + x(\operatorname{tg} x)' +$

$+ (\operatorname{ctg} x)' = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ [II, III, ; (2), (8), (9)].

626. Найти $f'(0)$, если $f(x) = e^x \arcsin x + \operatorname{arctg} x$.

Решение. $f'(x) = (e^x \arcsin x)' + (\operatorname{arctg} x)' = (e^x)'\arcsin x +$

$+ e^x(\arcsin x)' + (\operatorname{arctg} x)' = e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} +$

$+ \frac{1}{x^2+1} = e^x \frac{1+\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$.

Подставив значение $x = 0$, получим $f'(0) = 1 + 1 = 2$.

627. Вычислить производную функции $y = x^3 \log_5 x$.

Решение. $y' = (x^3)'\log_5 x + x^3 \cdot (\log_5 x)' = 3x^2 \log_5 x +$

$+ x^3 \cdot \frac{1}{x\ln 5} = x^2\left(3\log_5 x + \frac{1}{\ln 5}\right)$.

Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производные от данных функций.

а) Алгебраические функции

628. $f(x) = ax^2 + bx + c$. **629.** $y = 7x^7 - 3x^3 + \sqrt{2} + x^{-2} - 3x^{-7}$.

630. $y = 8x^5 - x^3 + x^2 + x + 1 - 100x^{-100}$.

631. $y = \frac{1}{x+1}$. **632.** $y = \frac{x+1}{x-1}$.

633. $y = \frac{x^2-1}{x^3+1}$. **634.** $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$; вычислить $f'(1)$.

635. $y = \frac{5}{x^2-x+1}$. **636.** $y = \frac{a-x^2}{a+x^2}$.

637. $\varphi(u) = \frac{1}{u^2+2u+3}$; вычислить $\varphi'(0)$.

638. $s = \frac{2t^4}{t^2+t+1}$. **639.** $y = \frac{x^{10}+3}{x^{11}+1}$.

640. $y = \frac{x}{x^2+x^{-2}}$. **641.** $y = 8\sqrt{x} + \frac{6}{x} + 3$.

642. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$. **643.** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$; вычислить $f'(4)$.

644. $y = \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[4]{x}$. **645.** $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

646. $y = x^2(\sqrt{x} + 3)$. 647. $y = x(\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{2})$.

648. $f(x) = \sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

б) Трансцендентные функции

649. $y = \sin x + \cos x$. 650. $y = x \sin x$.

651. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. 652. $y = \frac{x}{\sin x}$.

653. $y = \frac{\sin x}{x}$. 654. $y = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$.

655. $y = \sqrt{x} \cos x$. 656. $y = x \operatorname{tg} x$.

657. $y = \frac{x^2 + \operatorname{tg} x}{x^2 - \operatorname{tg} x}$. 658. $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x + \sin x}$.

659. $y = \arcsin x + \arccos x$. 660. $y = x \arcsin x$.

661. $y = x \operatorname{arctg} x$. 662. $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$.

663. $y = \sin x \arcsin x$. 664. $y = \frac{\arccos x}{\arcsin x + 1}$.

665. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x}$. 666. $y = \lg x$.

667. $y = \log_7 x$. 668. $y = x \ln x$.

669. $y = 10^x$. 670. $y = \frac{\ln x}{x}$.

671. $y = 2^x \ln x$. 672. $y = e^x \cos x$.

673. $y = e^x \cdot \sin x$. 674. $y = e^x \cdot 10^x$.

675. $y = \frac{13^x}{13^x + 1}$. 676. $y = \frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}$.

§ 3. Производная сложной функции

1. Пусть дана сложная функция (функция от функции) $y = f[\varphi(x)]$, причем промежуточная функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u' = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ — в соответствующей точке u производную $y'_u = f'(u)$. Тогда $y'_x = f'(u)\,\varphi'(x)$ или $y'_x = y'_u u'_x$, т. е. производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной.

2. При вычислении производных удобно пользоваться таблицей производных в такой форме (u — дифференцируемая функция от некоторой переменной):

$y = c = \text{const}$, $y' = 0$; (1)

$y = u$, $y' = u'$; (2)

$$\left.\begin{aligned} &y = u^{\alpha}\ (\alpha = \text{const}), && y' = \alpha u^{\alpha-1}u', \\ &y = \frac{1}{u}, && y' = -\frac{u'}{u^2}, \\ &y = \sqrt{u}, && y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &y = a^u\ (a \neq 1,\ a > 0), && y' = a^u \ln a\, u', \\ &y = e^u, && y' = e^u u'; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} &y = \log_a u, && y' = \frac{u'}{u \ln a}, \\ &y = \ln u, && y' = \frac{u'}{u}; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$y = \sin u, \qquad y' = \cos u\, u'; \quad (6)$$

$$y = \cos u, \qquad y' = -\sin u\, u'; \quad (7)$$

$$y = \operatorname{tg} u, \qquad y' = \sec^2 u\, u' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \quad (8)$$

$$y = \operatorname{ctg} u, \qquad y' = -\operatorname{csc}^2 u\, u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}; \quad (9)$$

$$y = \arcsin u, \qquad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (10)$$

$$y = \arccos u, \qquad y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (11)$$

$$y = \operatorname{arctg} u, \qquad y' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad (12)$$

$$y = \operatorname{arcctg} u, \qquad y' = -\frac{u'}{1+u^2}. \quad (13)$$

Найти производные следующих функций:

677. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$, т. е. $y = u^2$, где $u = \frac{x+1}{x-1}$.

Решение. $y' = 2uu'$ или $y' = 2\frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = 2\frac{x+1}{x-1} \times$
$\times \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = 2\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} =$
$= -\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$ [(3); IV, II; (1), (2) § 2].

678. $y = (2-5x)^{100}$, т. е. $y = u^{100}$, где $u = 2-5x$.

Решение. $y' = 100\,u^{99}u'$ или $y' = 100(2-5x)^{99}(2-5x)' =$
$= -500(2-5x)^{99}$ [(3); II, I; (1), (2) § 2].

679. $y = 10^{2x-3}$, т. е. $y = 10^u$, где $u = 2x-3$.

Решение. $y' = 10^u \ln 10\, u'$ или $y' = 10^{2x-3}\ln 10\ (2x-3)' =$
$= 2 \cdot 10^{2x-3}\ln 10$ [(4); II, I; (1), (2) § 2].

680. $y = \log_5 (x^3 - 1)$, т. е. $y = \log_5 u$, где $u = x^3 - 1$.

Решение. $y' = \frac{u'}{u \ln 5}$ или $y' = \frac{(x^3-1)'}{(x^3-1)\ln 5} = \frac{3x^2}{(x^3-1)\ln 5}$ [(5); II].

681. $y = \cos 5^x$, т. е. $y = \cos u$, где $u = 5^x$.

Решение. $y' = -\sin u \cdot u'$ или $y' = -\sin 5^x (5^x)' = -5^x \sin 5^x \ln 5$ [(7); (4) § 2].

682. $y = \operatorname{tg} 5x$, т. е. $y = \operatorname{tg} u$, где $u = 5x$.

Решение. $y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ или $y' = \frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{5}{\cos^2 5x} = 5\sec^2 5x$.

683. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, т. е. $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = \sqrt{x}$.

Решение. $y' = \frac{u'}{1+u^2}$ или $y' = \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

684. $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, т. е. $y = \arccos u$, где $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

Решение. $y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ или $y' =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3-(2x-1)^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3-(2x-1)^2}}$$ [(11); I, II].

685. $y = \sin^2 (2x-1)$, т. е. $y = u^2$, где $u = \sin (2x-1)$.

Решение. $y' = 2uu'$ или $y' = 2 \sin (2x-1) \cdot [\sin (2x-1)]' = 2 \sin (2x-1) \cdot \cos (2x-1) (2x-1)' = 4 \sin (2x-1) \cdot \cos (2x-1) = 2 \sin 2 (2x-1)$.

686. $y = \ln^3 (5x+2)$, т. е. $y = u^3$, где $u = \ln (5x+2)$.

Решение. $y' = 3u^2u'$ или $y' = 3 \ln^2 (5x+2) [\ln (5x+2)]' = 3 \ln^2 (5x+2) \frac{(5x+2)'}{5x+2} = \frac{15 \ln^2 (5x+2)}{5x+2}$.

687. $f(\alpha) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$; вычислить $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Здесь целесообразно сначала прологарифмировать. После логарифмирования получим

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} [\ln (1-\sin\alpha) - \ln (1+\sin\alpha)].$$

Теперь вычисляем производную

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right] = -\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Полагая $\alpha = \frac{\pi}{4}$, найдем $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}$.

688. $r = \ln \frac{e^t}{e^t + 1}$; вычислить $r'(0)$.

Решение. $r = \ln e^t - \ln (e^t + 1) = t - \ln (e^t + 1)$;

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{(e^t + 1)'}{e^t + 1} = 1 - \frac{e^t}{e^t + 1} = \frac{1}{e^t + 1}.$$

Полагая $t = 0$, найдем $r'(0) = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$.

689. $y = \sin^2 (ax + b)$.

Решение. $y' = 2\sin (ax + b)\,[\sin (ax + b)]' =$
$= 2 \sin (ax + b) \cos (ax + b)\,(ax + b)' =$
$= 2 \sin (ax + b) \cos (ax + b)\, a = a \sin 2(ax + b)$.

690. $y = \sin (3x + 1)$, т. е. $y = \sin u$, где $u = 3x + 1$.

691. $y = (1 + 2x)^8$, т. е. $y = u^8$, где $u = 1 + 2x$.

692. $s = \sin at$, т. е. $s = \sin u$, где $u = at$.

693. $y = \lg (ax^2 + bx + c)$, т. е. $y = \lg u$, где $u = ax^2 + bx + c$.

694. $y = \left(\frac{x^2}{3x + 1}\right)^9$, т. е. $y = u^9$, где $u = \frac{x^2}{3x + 1}$.

695. $y = \sin x^2$, т. е. $y = \sin u$, где $u = x^2$.

696. $y = \operatorname{tg} (\cos x)$, т. е. $y = \operatorname{tg} u$, где $u = \cos x$.

697. $y = \arcsin \sqrt{x}$, т. е $y = \arcsin u$, где $u = \sqrt{x}$.

698. $y = \cos^2 x$, т. е. $y = u^2$, где $u = \cos x$.

699. $y = \ln^3 x$, т. е. $y = u^3$, где $u = \ln x$.

700. $y = e^{-x^2}$, т. е. $y = e^u$, где $u = -x^2$.

701. $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x)$, т. е. $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = \operatorname{tg} x$.

702. $y = \arcsin (\sin x)$, т. е. $y = \arcsin u$, где $u = \sin x$.

703. $y = \sin (\sin x^2)$, т. е. $y = \sin u$, где $u = \sin x^2$.

704. $y = u^{100}$, где $u = 2 - 5x$.

705. $y = u^7$, где $u = \frac{x + 1}{x - 1}$.

706. $y = 10^u$, где $u = 2x - 3$.

707. $y = \log_5 u$, где $u = x^3 - 1$.

708. $y = \cos^2 x + \sin^2 x$.

709. $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

710. $y = (\arcsin x)^2$.

711. $y = \sin (x + \sin x)$.

712. $y = \cos (3^x + 3^{-x})$.

713. $y = 5 \sin (2 - 3x)$.

714. $y = \cos\left(6x - \frac{1}{x}\right)$.

715. $y = \sin (x^2 + 2^x)$.

716. $y = \operatorname{tg} (3x + 1)^3$.

717. $y = \operatorname{ctg} (x \sin x)$.

718. $y = 10^{x^2 + x + 1}$.

719. $s = e^{at} \cos bt$.

720. $z = (2a + 3bt)^4$.

721. $y = 7^{\frac{x \sin x}{1 - x}}$.

722. $y = 6^{\arcsin x}$.

723. $y = 2^{\cos x^2}$.

724. $y = \frac{\cos x}{3 \sin^2 x}$.

725. $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

726. $z = \ln \sqrt{\frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}}}$.

727. $y = \cos^2 x + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

728. $y = \ln \frac{x^2}{x^2+1}$.

729. $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$.

730. $y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$.

731. $f(x) = e^x \ln \sin x$.

§ 4. Логарифмическая производная

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \text{ (при } y > 0).$$

Нахождение производных от функций, которые допускают операцию логарифмирования (произведение, частное, возведение в степень и извлечение корня), значительно упрощается, если эти функции предварительно прологарифмировать, а затем воспользоваться логарифмической производной. Заметим, что логарифмическую производную будем применять формально, не учитывая, что формула имеет смысл лишь при $y > 0$.

732. Найти производную показательно-степенной функции

$$y = u^v \ (u > 0), \text{ где } u = f(x), \ v = \varphi(x).$$

Решение. Сначала логарифмируем данную функцию (по основанию e): $\ln y = v \ln u$. Теперь дифференцируем обе части равенства по правилу дифференцирования сложной функции. Получаем

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u},$$

отсюда

$$y' = y\left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right)$$

или

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right).$$

733. Найти y', если $y = x^x$.

Решение. $\ln y = x \ln x$.

Производную от левой части равенства находим по правилу дифференцирования сложной функции, а от правой — по правилу дифференцирования произведения:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln x + x (\ln x)'$$

или

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \frac{1}{x},$$

отсюда

$$y' = y(1 + \ln x)$$

или

$$y' = x^x (1 + \ln x).$$

734. Найти y', если

$$y = (x-1)\sqrt[3]{(5x+1)^2(x+1)}.$$

Решение. $\ln y = \ln(x-1) + \frac{2}{3}\ln(5x+1) + \frac{1}{3}\ln(x+1)$;

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} + \frac{10}{3(5x+1)} + \frac{1}{3(x+1)} = \frac{2(15x^2+7x-4)}{3(x^2-1)(5x+1)},$$

отсюда

$$y' = \frac{2(15x^2+7x-4)}{3(x^2-1)(5x+1)}(x-1)\sqrt[3]{(5x+1)^2(x+1)} = \frac{2(15x^2+7x-4)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(5x+1)}}.$$

735. Найти r', если

$$r = (\sin\varphi)^{\cos 2\varphi}.$$

Решение. $\ln r = \cos 2\varphi \ln\sin\varphi$; $\frac{r'}{r} = (\cos 2\varphi)'\ln\sin\varphi + \cos 2\varphi(\ln\sin\varphi)' = -2\sin 2\varphi\ln\sin\varphi + \cos 2\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$,

отсюда

$$r' = (\sin\varphi)^{\cos 2\varphi}(\operatorname{ctg}\varphi\cos 2\varphi - 2\sin 2\varphi\ln\sin\varphi).$$

736. Найти z', если

$$z = \frac{4x^2}{\sqrt[5]{(2-x)^3}}.$$

Решение. $\ln z = \ln 4 + 2\ln x - \frac{3}{5}\ln(2-x)$;

$$\frac{z'}{z} = \frac{2}{x} - \frac{3(2-x)'}{5(2-x)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{5(2-x)} = \frac{20-7x}{5x(2-x)},$$

отсюда

$$z' = \frac{20-7x}{5x(2-x)}\cdot\frac{4x^2}{\sqrt[5]{(2-x)^3}} = \frac{4x(20-7x)}{5(2-x)\sqrt[5]{(2-x)^3}}.$$

Пользуясь логарифмической производной, найти производные следующих функций:

737. $y = x^{\sin x}$.

738. $y = (\sin x)^x$.

739. $y = \sqrt[x]{x}$.

740. $y = x^{x^2}$.

741. $y = \frac{(x+1)^3\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

742. $s = \frac{\sqrt{1+t^2}}{3t+5}$.

743. $y = (x+1)^2(x-1)^3\sqrt[5]{(x+2)^4}$.

744. $y = (\sin x)^{\ln x}$.

§ 5. Производная неявной функции

Функция $y(x)$ называется *неявной*, если зависимость между x и y выражена уравнением

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

не разрешенным относительно y.

Чтобы найти производную от неявной функции, надо данное уравнение (1) продифференцировать, считая y функцией от x, и вновь полученное уравнение решить относительно производной y'.

745. Найти производные от следующих функций:
1) $y^3 - 3y + 2ax = 0$; 2) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$. Вычислить y' в точке $(2; -1)$; 3) $\sin\varphi + r\varphi - 5r = 0$. Вычислить $\frac{dr}{d\varphi}$; 4) $e^y + xy = e$. Вычислить y' в точке $(0; 1)$.

Решение. 1) Дифференцируем обе части равенства по x с учетом, что y есть функция от x, получаем

$$3y^2y' - 3y' + 2a = 0,$$

отсюда

$$y' = \frac{2a}{3(1 + y^2)}.$$

2) Дифференцируя по x, получаем

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0,$$

отсюда

$$y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

Теперь подставив $x = 2$, $y = -1$, найдем

$$y'(2) = -\frac{2\cdot 2 + 3(-1)}{3\cdot 2 + 2(-1)} = -\frac{1}{4}.$$

3) Дифференцируя по φ, получаем

$$\cos\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\cdot\varphi + r - 5\frac{dr}{d\varphi} = 0,$$

отсюда

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r + \cos\varphi}{5 - \varphi}.$$

4) Дифференцируя по x, находим

$$e^y y' + y + xy' = 0,$$

откуда $y' = -\frac{y}{e^y + x}$, $ay'(0) = -\frac{1}{e}$.

Найти производные от следующих неявных функций:

746. $2x - 3y + 1 = 0$. **747.** $x^2 + y^2 = 5e^x$.

748. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **749.** $x^2 - 5y^2 + 4xy - 1 = 0$.

750. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. **751.** $y = \sin(x + 2y)$.

Найти производные от следующих неявных функций в указанных точках:

752. $x^2 + y^2 = 1$ в точке $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

753. $y^2 = 2px$ в точке $\left(\frac{p}{2};\ p\right)$.
754. $x = y + \sin y$ в точке (0; 0).
755. $x^2 + xy + y^2 = 3$ в точке $(0; -\sqrt{3})$.
756. $ye^y - xe^x = y(x-1)$ в точке (1; 1).
757. $e^y + xy = e$ в точке (0; 1).
758. $e^{xy} + x^2 + y^3 = 2$ в точке (1; 0).

§ 6. Смешанные задачи

Найти производные:

759. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.
760. $u = \left(\frac{y}{1-y}\right)^n$.
761. $y = \frac{1-x^5}{\sqrt{3}}$.
762. $z = \frac{1}{y^3 + 2y - 1}$.
763. $y = \frac{2}{\sin x + \cos x}$.
764. $r = \frac{3\varphi^5}{b^2 - \varphi^2}$; вычислить $\frac{dr}{d\varphi}$.
765. $\varphi(\alpha) = \frac{\alpha - a}{1 + a}$; вычислить $\varphi'(1)$; $\varphi'(0)$.
766. $y = \sqrt{(a+x)(b+x)}$.
767. $y = 3x^2e^{-x}$.
768. $s = a\sin\omega t + b\cos\omega t$.
769. $z = \sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.
770. $y = \ln(1+x) + \arccos\frac{x}{2}$; вычислить $f'(1)$; $f'(0)$.
771. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$.
772. $s = 2^{-kt}\sin(\varphi_0 + \omega t)$.
773. $z = \sqrt[3]{\frac{1}{1+y^2}}$.
774. $y = \sin 2x\sqrt{1 + \cos^2 x}$.
775. $y = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$
776. $y = \cos(x^5 + \ln x)$.
777. $y = \ln\sin 3^x$.
778. $y = \operatorname{tg}(x^7 + 7^x)$.
779. $y = \lg\cos 3x$.
780. $f(t) = \cos t \cdot \sin(t + \varphi_0)$.
781. $y = \ln\ln(3x+2)$.
782. $y = \operatorname{arctg}\ln x$.
783. $z = (1 + \sqrt{x})^5$.
784. $s = \ln\frac{3t^4}{\sqrt[5]{t^3 - 1}}$.
785. $y = (x-1)^2\sqrt{x^2+1}$.
786. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
787. $y = (\ln x)^{\ln x}$.
788. $y = 2^{\sin(x + \sqrt{x})}$.
789. $y = 2^{3^x}$.
790. $x^y = y^x$; вычислить $\frac{dy}{dx}$.
791. $y^2 - \sin 3x = 0$.
792. $y = \operatorname{tg}(x+y)$.
793. $\sin(2x + 3y) - 2y = 0$; вычислить y' в точке (0, 0).

§ 7. Производные высших порядков

Производную y' от функции $y = f(x)$ будем называть *производной первого порядка;* производную от производной первого порядка называют *второй производной* или *производной второго порядка* от функции $y = f(x)$ и обозначают y'' или $f''(x)$; производную от производной второго порядка называют *производной третьего порядка* и обозначают y''' или $f'''(x)$. Если производные выше третьего порядка, то обычно их обозначают так: $y^{(4)}$ или $f^{(4)}(x)$, $y^{(5)}$ или $f^{(5)}(x)$ и т. д. Иногда пишут y^{IV} или $f^{IV}(x)$, y^{V} или $f^{V}(x)$ и т. д.

Производная от производной $(n-1)$-го порядка называется *производной n-го порядка от функции* $y = f(x)$ и обозначается $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$.

794. Найти производные указанного порядка от данных функций:

1) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$; $y''' = ?$ 2) $y = \ln x$; $y^{(4)} = ?$

3) $s = t^2 - t + 1$; $s''(0) = ?$ 4) $f(x) = \sin 2x$; $f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

Решение. 1) Найдем первую производную

$$y' = 3x^2 + 4x - 4.$$

Теперь найдем вторую производную

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 4x - 4)' = 6x + 4.$$

Продифференцируем еще один раз и получим производную третьего порядка

$$y''' = (y'')' = (6x + 4)' = 6.$$

2) Аналогично найдем производную первого порядка, а затем производные более высокого порядка:

$$y' = \frac{1}{x};\quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2};$$

$$y''' = (-x^{-2})' = -(x^{-2})' = 2x^{-3};\quad y^{(4)} = (2x^{-3})' =$$

$$= 2(x^{-3})' = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}.$$

3) $s' = 2t - 1$; $s'' = 2$, следовательно, $s''(0) = 2$, так как вторая производная данной функции $s''(t) = 2$ при любом t.

4) $f'(x) = 2\cos 2x$; $f''(x) = -4\sin 2x$; $f'''(x) = -8\cos 2x$; $f^{(4)}(x) = 16\sin 2x$; $f^{(5)}(x) = 32\cos 2x$.

При $x = \frac{\pi}{2}$ найдем

$$f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 32\cos\pi = -32.$$

795. Показать, что функция $y = \cos 2x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 4y = 0$.

Решение. Определяем y' и y'':

$$y' = -2\sin 2x;\quad y'' = -4\cos 2x.$$

Подставив y' и y'' в данное уравнение, получим тождество

$$-4\cos 2x + 4\cos 2x = 0;\quad 0 = 0.$$

796. Найти производные второго порядка от данных функций:

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$; 3) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$;

4) $y = e^{\sin x}$; 5) $y = e^{\cos x}$; 6) $z = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

797. Найти производные указанного порядка от данных функций:

1) $y = x^2 + x + 7$; $y''' = ?$
2) $y = x^5$; $y^{(5)} = ?$
3) $f(x) = x^9$; $f'''(1) = ?$
4) $y = \sin x$; $y^{(4)} = ?$
5) $y = \cos x$; $y^{(4)} = ?$
6) $y = \sin 4x$; $y^{(4)} = ?$
7) $y = \cos(ax + b)$; $y^{(4)} = ?$
8) $y = e^{5x+3}$; $y'''(0) = ?$
9) $y = \sin x^2$; $y''' = ?$
10) $y = e^x$; $y^{(n)} = ?$
11) $y = 2^{3x+5}$; $y^{(n)} = ?$
12) $y = \lg x$; $y^{(n)} = ?$
13) $y = \sin^2 x$; $y^{(6)} = ?$
14) $y = x^n$; $y^{(n)} = ?$

798. Убедиться в том, что функция $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где A, ω, φ_0 — постоянные, удовлетворяет уравнению $y'' + \omega^2 y = 0$.

799. Убедиться в том, что функция $y = Ae^{-kx} + Be^{kx}$, где A, B, k — постоянные, удовлетворяет уравнению $y'' - k^2 y = 0$.

800. Чему равна n-я производная от многочлена

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n?$$

§ 8. Применение производной в геометрии и физике

1. Уравнение касательной и нормали. Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$ и в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$. Тогда уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \tag{1}$$

где

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной (рис. 60), называется *нормалью* к кривой. Ее уравнение имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2}$$

2. Угол между кривыми. Угол между двумя кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ в их общей точке $M_0(x_0; y_0)$ определяется как

угол φ между двумя касательными *1* и *2* к этим кривым в точке M_0 (рис. 61) и по формуле (1) § 6 гл. II находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varphi'(x_0) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)\varphi'(x_0)}. \qquad (3)$$

3. Механический смысл второй производной. Пусть точка движется прямолинейно по закону

$$s = f(t).$$

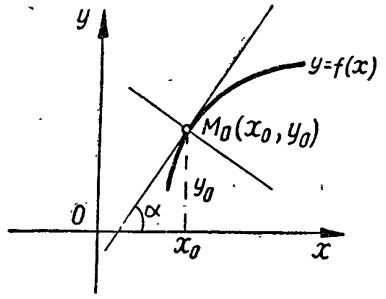


Рис. 60

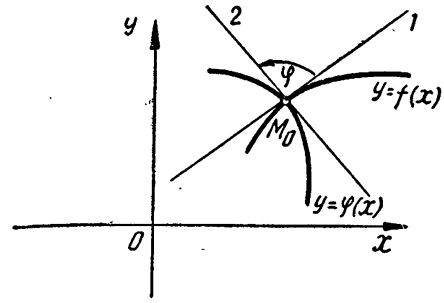


Рис. 61

Выше уже говорилось (§ 1 гл. V), что скорость равна производной пути по времени: $v = s'_t$, а ускорение есть производная от скорости v по времени: $a = \frac{dv}{dt}$ или $a = s''_t$, т. е. ускорение есть вторая производная пути по времени.

801. Написать уравнение касательной и нормали к параболе $f(x) = x^2 - 2x + 5$ в точке, абсцисса которой $x = 2$.

Решение. Воспользуемся формулами (1) и (2).

По условию $x_0 = 2$, подставляя это значение в данное уравнение параболы, найдем y_0: $y_0 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 5$, $y_0 = 5$.

Следовательно, точка касания $M_0(2; 5)$.

Теперь найдем угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке $x = 2$:

$$f'(x) = 2x - 2,$$

отсюда $f'(2) = 2$.

Уравнение касательной M_0T:

$$y - 5 = 2(x - 2) \text{ или } 2x - y + 1 = 0.$$

Уравнение нормали M_0N (рис. 62):

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2) \text{ или } x + 2y - 12 = 0.$$

802. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ в точке (1; 3).

Решение. Подставляя значения координат данной точки в уравнение, убедимся, что точка (1; 3) лежит на кривой

$$1-2\cdot1\cdot3+3\cdot3^2-2\cdot3-16=0 \text{ или } 0=0.$$

Дифференцируя по x, находим

$$2x-2y-2xy'+6yy'-2y'=0,$$

откуда

$$y'=\frac{x-y}{x-3y+1}.$$

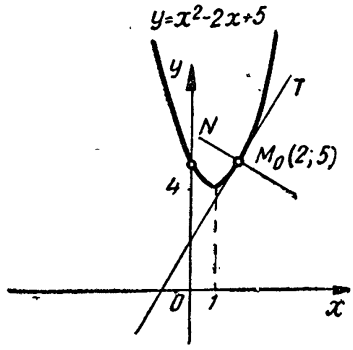


Рис. 62

Производная в точке (1; 3)

$$y'(1)=\frac{2}{7}.$$

Уравнение касательной:

$$y-3=\frac{2}{7}(x-1)$$

или

$$2x-7y+19=0.$$

Уравнение нормали:

$$y-3=-\frac{7}{2}(x-1) \text{ или } 7x+2y-13=0.$$

803. Найти угол между двумя кривыми $y=2x^2$ и $y=x^3+2x^2-1$ в точке их пересечения.

Решение. Найдем точку пересечения этих кривых. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y=2x^2, \\ y=x^3+2x^2-1, \end{cases}$$

получим $x=1$ и $y=2$.

Таким образом, точка пересечения кривых $M_0(1; 2)$. Найдем угловые коэффициенты касательных к кривым при $x=1$:

$$y'=4x,\ y'(1)=4, \text{ т. е. } k_1=4,$$
$$y'=3x^2+4x,\ y'(1)=7, \text{ т. е. } k_2=7.$$

По формуле (3) получим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{7-4}{1+4\cdot7}=\frac{3}{29}\approx0{,}1034,$$

отсюда

$$\varphi\approx5°54'.$$

804. Точка движется прямолинейно по закону $s=4t+t^3$. Найти скорость и ускорение движения точки для моментов времени $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$ (s дается в сантиметрах, t — в секундах).

Решение. Скорость $v=s'_t=(4t+t^3)'=4+3t^2$; ускорение $a=s''_t=(4+3t^2)'=6t$. Следовательно, в момент времени $t_0=0$ $v_0=4$ *см/сек*, $a_0=0$ *см/сек*^{2}. При $t_1=1$ $v_1=s'(1)=$

$= 7$ *см/сек*, $a_1 = 6$ *см/сек*^{2}. При $t_2 = 2$ $v_2 = s'(2) = 16$ *см/сек*, $a_2 = 12$ *см/сек*^{2}.

805. Написать уравнения касательной и нормали к кривым в указанных точках:

1) $y = x^2 + 4x - 3$ в точке (1; 2);
2) $y = -2x^2 + 3x$ в точке, абсцисса которой равна 2;
3) $f(x) = x^2 + 3$ в точке, ордината которой равна 4;
4) $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ в точке, абсцисса которой равна 1;
5) $y = \operatorname{tg} x$ в точке, абсцисса которой равна $\frac{\pi}{4}$;
6) $y = \ln x$ в точке пересечения с осью Ox;
7) $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ в точке $(2; -1)$;
8) $x^4 + y^4 - 2xy = 0$ в точке (1; 1).

806. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y^5 = 3x^4 + 2xy$ в точке $(-1; 1)$.

807. На линии $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

808. Показать, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \frac{x - 4}{x - 2}$, в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

809. На кривой $y = x^3$ найти точку, в которой касательная параллельна биссектрисе первого координатного угла.

810. Найти углы, под которыми пересекаются данные линии: 1) $y = x^2$ и $y = x^3$; 2) $y = x^2$ и $y = kx$; 3) $x^2 + y^2 = 4$ и $x + 2y = 2$.

811. Точка движется прямолинейно по закону

$$s = 3t^2 + t - 1.$$

Найти скорость и ускорение движения точки для моментов времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (s дается в метрах, t — в секундах).

812. Точка совершает колебательное движение по оси абсцисс, согласно закону $x = \cos \omega t$.

Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно x?

813. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента $t = 0$, определяется формулой $Q = 2t^2 + 3t + 1$ ($к$). Найти силу тока в конце десятой секунды.

814. Имеется тонкий неоднородный стержень AB длиной 20 *см*. Известно, что для любой точки C стержня, отстоящей от A на l *см*, масса куска стержня AC определяется по формуле $M = 3l^2 + 5l$ ($г$). Найти линейную плотность стержня: 1) в точке A; 2) в точке B; 3) на середине стержня.

§ 9. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x имеет конечную производную, т. е. существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y',$$

тогда по определению предела следует

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \tag{1}$$

где α — бесконечно малая величина, т. е. $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Из формулы (1) получаем

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x. \tag{2}$$

Линейная часть приращения функции относительно Δx называется *дифференциалом функции* и обозначается символом $dy = y' \Delta x$ или $df(x) = f'(x)\,\Delta x$.

Учитывая, что дифференциал независимой переменной x равен ее приращению, т. е. $dx = \Delta x$, можно написать

$$dy = y' dx. \tag{3}$$

Таким образом, дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал независимой переменной.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, если она имеет в этой точке дифференциал или, что равносильно этому, конечную производную.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка, то она называется *дифференцируемой в этом промежутке.*

Из формулы (3) следует, что $y' = \frac{dy}{dx}$. Формула (3) верна и в том случае, когда функция сложная.

815. Найти дифференциалы функций:

1) $y = x^3$ в точке $x = 0$, если $\Delta x = 0{,}3$; 2) $y = x^3 - x^2 + 3x - 1$; 3) $r = \varphi^4 + 2^{\sin 3\varphi}$; 4) $y = \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ в точке $x = 1$, если $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. 1) Найдем приращение данной функции в точке x:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x^2 \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Первый член приращения функции содержит Δx в первой степени, т. е. является линейной частью приращения функции относительно Δx, следовательно, по определению $dy = 3x^2 \Delta x$. Если $x = 0$, $\Delta x = 0{,}3$, то $df(0) = 0$.

В последующих примерах дифференциалы функций найдем значительно проще, воспользовавшись формулой (3):

2) $dy = y'dx = (x^3 - x^2 + 3x - 1)'\,dx = (3x^2 - 2x + 3)\,dx$.

3) $dr = (\varphi^4 + 2^{\sin 3\varphi})'d\varphi = (4\varphi^3 + 3\cos 3\varphi\, 2^{\sin 3\varphi} \ln 2)\,d\varphi$.

4) $dy = (\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}\sqrt{x})'\,dx = \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}\right)dx$.

Полагая $x = 1$ и $dx = 0{,}1$, находим $dy = \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2\cdot 2}\right)0{,}1 = 0{,}125$.

816. Найти дифференциалы следующих функций:

1) $y = \sin x$ в точке $x_0 = 0$, если $\Delta x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$, если $\Delta x = 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01$;

3) $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$, если $\Delta x = 2;\ 1;\ -0{,}1;\ -0{,}01$.

Найти дифференциалы следующих функций:

817. $y = 2\sin x$.

818. $y = 6x^2 + 2$.

819. $s = \frac{gt^2}{2}$.

820. $y = \operatorname{tg} 2x$.

821. $s = a\cos(t + 2)$.

822. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

823. $s = a\sin(\omega t + \varphi_0)$.

824. $p = \frac{1}{v}$.

825. $y = \sqrt[3]{x+1}$.

826. $y = x \cdot 10^x$.

827. $y = \arcsin\sqrt[3]{x}$.

828. $y = \operatorname{tg} x^3$.

829. $y = \cos(x^2 + 3x + 1)$.

830. $y = 2^{\arcsin x}$.

831. $v = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

832. $v = \ln\sin(x+1)$.

§ 10. Геометрический смысл дифференциала. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям

1. Из рис. 58 видно, что $AM = \Delta y$; $AB = \Delta x \operatorname{tg}\alpha$, т. е. $AB = y'\Delta x$, или $AB = dy$.

Таким образом, приращение функции Δy есть приращение ординаты кривой, а дифференциал функции есть приращение ординаты касательной.

2. Из равенства (2) § 9 следует (см. также рис. 58), что при достаточно малых $|\Delta x|$

$$\Delta y \approx dy. \tag{1}$$

Перепишем выражение (1) иначе:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x,$$

тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x. \tag{1'}$$

833. Вычислить приближенно:

1) $\sqrt[3]{26}$; 2) $\cos 60°6'$; 3) $\ln 1{,}05$.

Решение. 1) Воспользовавшись формулой (1'), получим

$$\sqrt[3]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x_0}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\Delta x.$$

Пусть $x_0=27$, тогда $\Delta x=-1$, следовательно,

$$\sqrt[3]{26}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}(-1)=3-\frac{1}{27}\approx 2{,}96.$$

2) Воспользовавшись формулой (1'), найдем

$$\cos(x_0+\Delta x)\approx\cos x_0+(-\sin x_0)\Delta x.$$

Градусную меру переводим в радианную:

$$x_0=\frac{\pi}{3};\quad \Delta x=\frac{\pi\cdot\frac{6}{60}}{180}=\frac{\pi}{1800};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{1800}\right)\approx\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{1800}=0{,}5-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{1800}.$$

Будем вычислять с точностью до четвертого десятичного знака:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660;\quad \pi\approx 3{,}1416;\quad \cos 60°6'\approx 0{,}5-\frac{0{,}87\cdot 3{,}14}{1800}=$$

$$=0{,}5-\frac{2{,}7318}{1800}\approx 0{,}5-0{,}0015=0{,}4985.$$

Результат вычисления совпал с табличным значением (см. таблицы Брадиса).

3) $\ln(x_0+\Delta x)\approx\ln(x_0)+\frac{1}{x_0}\Delta x$;

$\ln 1{,}05\approx\ln 1+\frac{1}{1}0{,}05=0{,}05$;

$x_0=1$; $\Delta x=0{,}05$.

834. Вычислить приближенно: 1) $\sqrt{26}$; 2) $\sqrt{24}$; 3) $\sqrt[3]{124}$; 4) $\sqrt[5]{33}$; 5) $\sqrt[4]{82}$; 6) $\cos 91°$; 7) $\operatorname{tg} 44°$; 8) $\operatorname{ctg} 29°30'$; 9) $\ln(e+0{,}1)$; 10) $\operatorname{arcctg} 0{,}98$; 11) $(3{,}03)^5$; 12) $\ln 0{,}97$.

835. Зная, что $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660$, $\cos 60°=0{,}5$, найти приближенно $\sin 60°3'$, $\sin 60°12'$. Полученные приближенные значения сравнить с табличными данными.

836. Найти приближенные значения функций:

1) $y=x^3+x^2$ при $x=2{,}01$;

2) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ при $x=2{,}9$;

3) $y=\sqrt{\frac{4-x}{1+x}}$ при $x=3{,}02$;

837. Ребро куба равно 10 *см*. Найти приближенное значение приращения объема куба при увеличении его ребра на 0,01 *см*.

838. Скорость частиц жидкости при вытекании из малого отверстия в сосуде определяется по закону Торичелли

$$v = \sqrt{2gH},$$

где H — высота поверхности жидкости над отверстием. На сколько изменится скорость истечения, если H изменится на ΔH?

Глава VI Исследование функций и построение графиков

§ 1. Теоремы Ролля и Лагранжа

1. *Теорема Ролля.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, имеет конечную производную внутри этого сегмента и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка c на интервале (a, b), в которой

$$f'(c) = 0.$$

2. *Теорема Лагранжа.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную производную на интервале (a, b) то $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, где $a < c < b$.

839. Дана функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

Удовлетворяет ли эта функция условиям теоремы Ролля на сегменте $[-1, 1]$? Если теорема неприменима, то почему?

Решение. Функция непрерывна на сегменте $[-1, 1]$ и на концах этого сегмента принимает равные значения $f(1) = f(-1) = 0$. Однако внутри сегмента имеется точка $x = 0$, в которой производная не существует. Следовательно, условия теоремы Ролля не выполнены, поэтому теорема Ролля неприменима к данной функции.

И действительно, $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$ на сегменте $[-1, 1]$, т. е. не существует точки $c\,(-1 < c < 1)$, в которой $f'(c) = 0$.

840. Удовлетворяет ли функция $f(x) = x^2 + 3$ условиям теоремы Лагранжа на сегменте $[-1, 2]$? Если теорема применима, то найти точку c, в которой $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, где $a = -1$, $b = 2$.

Решение. Функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, так как она непрерывна на сегменте $[-1, 2]$ и имеет

конечную производную в интервале $(-1, 2)$. Точку c найдем из уравнения

$$f(2) - f(-1) = f'(c)[2 - (-1)],$$

отсюда

$$7 - 4 = 2c \cdot 3, \quad c = \frac{1}{2}.$$

841. Проверить справедливость теоремы Ролля для следующих функций:
1) $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на сегменте $[-1, 2]$;
2) $y = 4^{\sin x}$ на сегменте $[0, \pi]$.

842. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ принимает одинаковые значения на концах сегмента $[-1, 1]$. Убедиться, что производная от этой функции на интервале $(-1, 1)$ нигде в нуль не обращается. Объяснить это отклонение от теоремы Ролля.

843. Из теоремы Лагранжа определить значение c для следующих функций:
1) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ на сегменте $[0, 2]$;
2) $y = \ln x$ на сегменте $[1, a]$ при $a > 1$.

844. Можно ли к функции $f(x) = 2 - \sqrt[5]{x^4}$ применить на сегменте $[-2, 2]$ теорему Ролля, теорему Лагранжа?

§ 2. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

Пусть имеем частное двух функций $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в промежутке $(a, b]$, имеют конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в этом промежутке, причем $\varphi'(x) \neq 0$.

Тогда если обе функции бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to a$, т. е. если частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a$ представляет неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

при условии, что предел отношения производных существует (конечный или бесконечный).

Правило применимо и для случая, когда $a = \infty$.

Раскрытие неопределенностей вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ и 0^0, ∞^0, 1^∞ при помощи алгебраических преобразований и логарифмирования сводится к раскрытию неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

845. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{cx^2+d}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}$.

Решение. В примерах 1 — 4 неопределенности вида $\frac{0}{0}$, а в примерах 5 и 6 — вида $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{2x-5}=\frac{8}{3}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{6}{4}=1{,}5.$

В этом примере правило Лопиталя применили дважды.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-6+6\cos x}{5x^4}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-6\sin x}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-6\cos x}{60x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin x}{120x}=\dfrac{1}{20}.$

Здесь правило Лопиталя применили четыре раза, а затем воспользовались первым замечательным пределом.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cdot\cos^2 x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\dfrac{1+1}{1}=2.$

Здесь правило Лопиталя применили один раз.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{cx^2+d}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{2cx}=\dfrac{a}{c}.$

Здесь правило Лопиталя применили также один раз.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5\cos 5x}{\sin 5x}:\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x\cdot\sin 2x}{2\cos 2x\cdot\sin 5x}=\dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x}{\cos 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=$

$=\dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x}{\cos 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x}{5\cos 5x}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{2}{5}=1.$

Здесь правило Лопиталя применили два раза.

846. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 2) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$; 4) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. В каждом из первых двух примеров имеем разность двух бесконечно больших положительных величин, т. е. неопределенность вида $\infty - \infty$, а в примерах 3 и 4 — произведение бесконечно малой на бесконечно большую величину, т. е. неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Данные выражения представим в виде дробей и сведем к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а затем применим правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)=\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}=\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos\varphi}{-\sin\varphi}=\frac{0}{1}=0.$

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0.$

4) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-2\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2\alpha}{\cos\alpha}=$

$$=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{-\sin\alpha}=1\cdot 2=2.$$

847. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. В данных примерах имеем соответственно неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞.

В каждом из указанных случаев логарифм от функции принимает неопределенность вида $0\cdot\infty$. Раскрывая эту неопределенность, находим предел логарифма функции, отсюда получаем и предел самой функции.

1) Полагаем $y = x^x$ и логарифмируем обе части этого равенства: $\ln y = x\ln x$. Найдем

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0} x=0,$$

отсюда $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

2) Положим $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ и прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y=\sin x \ln\frac{1}{x}=-\sin x \ln x.$$

Найдем предел $\ln y$:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=-\lim_{x\to 0}\sin x \ln x.$$

Полученную неопределенность вида $0\cdot\infty$ преобразуем к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\right)=1\cdot 1\cdot 0=0,$$

отсюда $\lim\limits_{x\to 0} y=e^0=1$.

3) $y=x^{\frac{1}{x-1}}$, $\ln y=\frac{1}{x-1}\ln x$;

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1,$$

отсюда $\lim\limits_{x\to 1} y=e$, т. е. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}=e$.

Заметим, что правило Лопиталя применимо тогда, когда выполняются условия теоремы, и в частности, когда существует предел отношения производных. Однако может оказаться, что предел отношения функций существует, а предел отношения производных не существует, в этом случае надо раскрывать неопределенность другим способом.

Приведем примеры. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$, а отношение производных $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ при $x\to\infty$ предела не имеет. Кроме этого, производная знаменателя $\varphi'(x)=1+\cos x$ при $x=\pi(2k-1)$ равняется нулю ($k=\pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$), следовательно, производная $\varphi'(x)$ в некоторых точках промежутка $[c,\ \infty)$ обращается в нуль, что является также нарушением условия теоремы.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1}=1$, а отношение производных $\dfrac{1+\cos x}{1}$ при $x\to\infty$ предела также не имеет.

Найти пределы:

848. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$.

849. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{\sin(x-2)}$.

850. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

851. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2}{3}x}{\sin 4x}$.

852. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-2x}{x^3}$.

853. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\ln(1+2x)}{x^2}$.

854. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$.

855. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}$.

856. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

857. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(n+x^m)}{\lg(m+x^n)}$.

858. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\ (\alpha>0)$.

859. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\ln 2x}$.

860. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}(ax)}{\ln\operatorname{tg}(bx)}$.

861. $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha\ln x\ (\alpha>0)$.

862. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}\ (\alpha>0)$.

863. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-2}\right)$.

864. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

865. $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{3}{1+\ln x}}$.

866. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^{\cos x}$.

867. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

868. $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

869. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$.

870. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

871. $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{tg}x)^x$.

§ 3. Возрастающие и убывающие функции

Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастала (убывала), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$) в каждой точке интервала (a, b);

2) $f'(x)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком промежутке, составляющем часть интервала (a, b).

872. Найти промежутки возрастания и убывания следующих функций:

1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $f(x) = x^3 + 2x - 5$; 4) $y = \ln(x^2 + 2x + 3)$; 5) $y = 2x^2 - \ln x$; 6) $y = \frac{1}{x-2}$.

Решение. 1) Данная функция определена на всем множестве действительных чисел. Найдем производную функции

$$y' = 2x.$$

Функция убывает, если $2x < 0$, т. е. $x < 0$, и возрастает, если $2x > 0$, т. е. $x > 0$. Следовательно, в интервале $(-\infty, 0)$ функция убывает, в интервале $(0, +\infty)$ возрастает (см. рис. 55, *а*).

2) Функция определена в интервале $(-\infty, +\infty)$. Найдем производную

$$y' = 3x^2.$$

Производная $y' \geqslant 0$ (обращается в нуль только в одной точке $x = 0$), следовательно, функция возрастает в интервале $-\infty < x < +\infty$ (см. рис. 55, *б*).

3) Функция определена на всей числовой прямой. Находим производную функции

$$f'(x) = 3x^2 + 2.$$

Величина $3x^2 + 2 > 0$ при всех значениях x, т. е. функция возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$.

4) Функция определена в интервале $(-\infty, +\infty)$. Находим производную

$$y' = \frac{2x+2}{x^2+2x+3}.$$

Знаменатель дроби $x^2 + 2x + 3 > 0$ при любых значениях x (так как корни трехчлена комплексные), следовательно, знак производной совпадает со знаком числителя:

$y' < 0$, если $2x + 2 < 0$, т. е. $x < -1$;

$y' > 0$, если $2x + 2 > 0$, т. е. $x > -1$.

Функция убывает в интервале $(-\infty, -1)$ и возрастает в интервале $(-1, +\infty)$. В точке $x = -1$ убывание сменяется возрастанием.

5) Данная функция определена при $x > 0$. Найдем производную

$$y' = 4x - \frac{1}{x}.$$

Функция возрастает, если $4x - \frac{1}{x} > 0$, т. е. $4x^2 - 1 > 0$ $(x > 0)$, или $4x^2 > 1$, т. е. $x^2 > \frac{1}{4}$, или $x > \frac{1}{2}$. Функция убы-

вает, если $4x - \frac{1}{x} < 0$, т. е. $4x^2 - 1 < 0$, или $x^2 < \frac{1}{4}$, т. е. $x < \frac{1}{2}$.

Итак, в интервале $0 < x < \frac{1}{2}$ функция убывает, в интервале $\frac{1}{2} < x < +\infty$ возрастает. В точке $x = \frac{1}{2}$ убывание сменяется возрастанием.

6) Точка $x = 2$ есть точка разрыва второго рода:

$$y' = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0 \text{ при } x \neq 2.$$

Следовательно, функция убывает в интервалах $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$.

Определить интервалы убывания и возрастания функций:

873. $y = x^2 + x + 1$.
874. $y = 3x - 3x^2$.
875. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
876. $y = 1 - x + 2x^4$.
877. $y = \frac{x}{1+x^2}$.
878. $y = x^2 e^{-x}$.
879. $y = x \ln x$.
880. $y = x - e^x$.
881. $y = e^{-x^2}$.
882. $y = x + \cos x$.

§ 4. Максимум и минимум функций. Необходимый признак. Достаточные признаки

1. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум) $f(x_0)$, если в некоторой окрестности* этой точки (при $x \neq x_0$) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции. Точка, в которой функция имеет минимум или максимум, называется *точкой экстремума* функции.

2. Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю либо не существует (необходимое условие существования экстремума).

Точки возможного экстремума функции $f(x)$ называются *критическими* точками для $f(x)$. Заметим, что если x_0 есть критическая точка, то касательная в соответствующей точке $M_0(x_0; y_0)$ графика функции параллельна оси Ox ($f'(x_0) = 0$) или Oy ($f'(x_0) = \infty$) либо вовсе не существует (см. гл. V, рис. 59). Заметим также, что критические точки лежат внутри области определения функции.

3. Сформулируем достаточные признаки существования экстремума.

---

* *Окрестностью* точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0.

Правило 1. Если при переходе (слева направо) через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум; если с минуса на плюс, то минимум; если знака не меняет, то экстремума нет.

Итак, чтобы найти экстремум функции, надо:

1) определить критические точки, т. е. найти действительные корни уравнения $f'(x) = 0$, а затем найти и те точки из области определения функции, в которых производная не существует; 2) исследовать на экстремум каждую критическую точку по правилу 1.

Правило 2. Пусть $f'(x_0) = 0$ и в окрестности точки x_0 существует конечная первая производная, а в самой точке x_0 — вторая производная $f''(x_0)$, тогда: 1) если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 имеем минимум; 2) если $f''(x_0) < 0$, то имеем максимум; 3) если $f''(x_0) = 0$, то это правило ничего не дает, для решения вопроса надо применить правило 1.

883. Исследовать на максимум и минимум следующие функции.

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 3) $y = |x|$; 4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$; 5) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;

6) $y = 3\sqrt{x^2 - x^2}$; 7) $\varphi(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

Решение. 1) Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Находим производную $f'(x) = 3x^2$. Решаем уравнение: $3x^2 = 0$; $x = 0$ (критическая точка).

При переходе через точку $x = 0$ производная знака не меняет, например, если $x = -1$, то $f'(-1) = 3 > 0$, если $x = 1$, то $f'(1) = 3 > 0$. Следовательно, экстремума нет (см. рис. 55, *б*).

2) Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Приравняв знаменитель к нулю, получим

$$3\sqrt[3]{x^2} = 0,$$

отсюда находим критическую точку $x = 0$, где производная не существует ($f'(0) = \infty$).

При переходе через критическую точку $x = 0$ производная знака не меняет, следовательно, экстремума нет (рис. 63, *а*).

3) Функция определена и непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Как мы уже знаем (см. гл. V, § 1), эта функция непрерывна в точке $x = 0$, но производной в этой точке не существует, однако в точке $x = 0$, функция имеет минимум (см. рис. 59).

4) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдем производную, приравняем ее к нулю и определим действительные корни:

$$f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4); \quad x(x^2 - 4) = 0,$$

следовательно, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$ — критические точки.

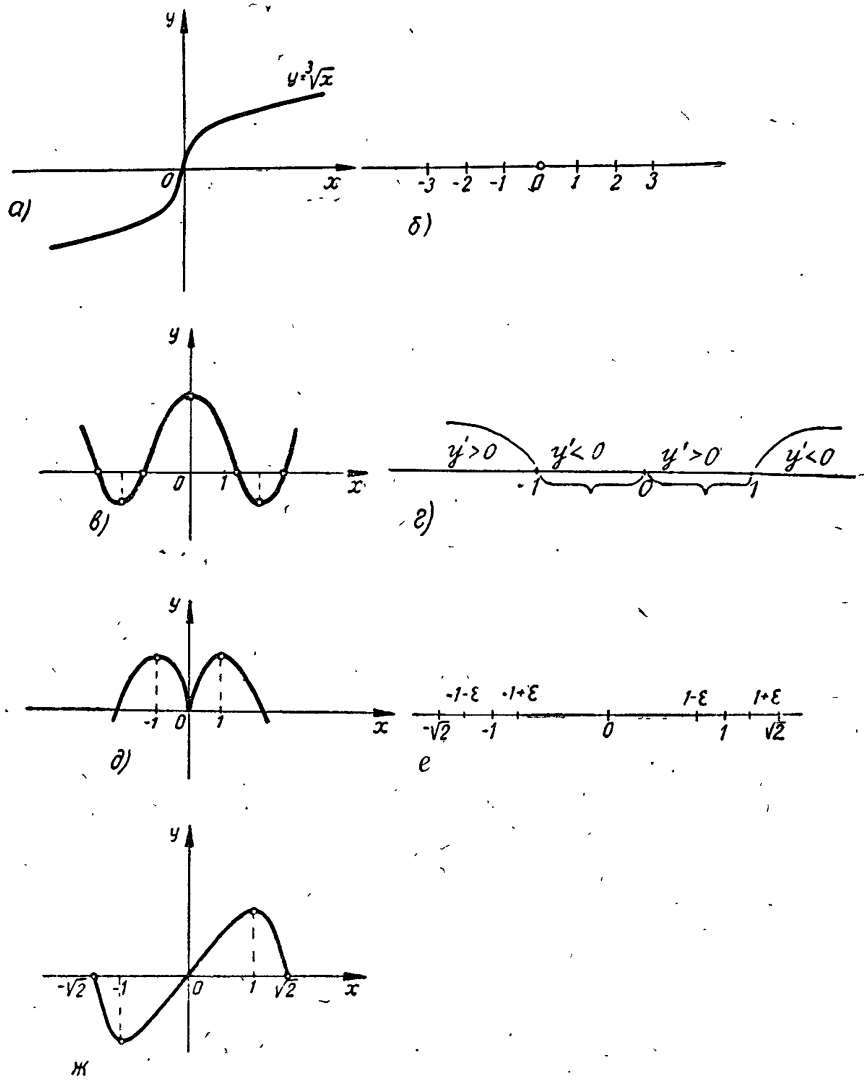


Рис. 63

Теперь исследуем знак производной в окрестности каждой из этих точек (рис. 63, *б*).

Так как левее точки $x = -2$ критических точек нет, то можно взять любое значение x слева от точки -2, например,

$x = -3$. Производная в этой точке имеет знак минус ($f'(-3) = -15 < 0$), справа при $x = -1$ — знак плюс ($f'(-1) = 3 > 0$), следовательно, в точке $x = -2$ будет минимум. Слева от точки 0, как уже установлено, производная имеет знак плюс, справа можно брать любое значение x между 0 и 2, например при $x = 1$ знак производной будет минус (max).

Слева от точки 2, как мы уже знаем, знак производной минус, теперь можно взять любое значение x справа от точки 2 (так как справа от этой точки критических точек нет), например $x = 3$, в этой точке производная больше нуля ($f'(3) = 15 > 0$), следовательно, в точке $x = 2$ будет минимум.

Итак, имеем два минимума $f(-2) = -1$, $f(2) = -1$ и максимум $f(0) = 3$.

Найдем точки пересечения графика функции с осью Ox. Пусть $y = 0$, тогда $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 = 0$, $x^4 - 8x^2 + 12 = 0$. Решая это уравнение, получаем

$$x_1 = \sqrt{6} \approx 2{,}4; \quad x_2 = -\sqrt{6} \approx -2{,}4; \quad x_3 = \sqrt{2} \approx 1{,}4;$$
$$x_4 = -\sqrt{2} \approx -1{,}4.$$

Воспользовавшись результатами, записанными в следующей таблице:

x	-2	0	2
y	-1	3	-1
y'	0	0	0
вывод	$-+$ min	$+-$ max	$-+$ min

а также найденными точками пересечения кривой с осью Ox, построим график функции (рис. 63, *в*).

5) Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Находим критические точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9; \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1.$$

Воспользуемся правилом 2. Найдем вторую производную и значение второй производной в этих точках:

$$f''(x) = 6(x - 2);$$

$f''(3) = 6 > 0$, значит, имеет минимум, равный $f(3) = -4$, $f''(1) = -6 < 0$ — максимум, равный $f(1) = 0$.

6) Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Найдем производную:

$$y' = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right).$$

Решив уравнение $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x = 0$ или $x^4 - 1 = 0$, получим критические точки $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Теперь найдем точки, в которых производная не существует. Приравняв знаменатель производной к нулю, получим

$$\sqrt[3]{x} = 0,$$

отсюда находим третью критическую точку $x = 0$ ($y'(0) = \infty$).

Исследуем знак производной в окрестности точек $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ (рис. 63, *г*). Составим таблицу:

x	-1	0	1
y	2	0	2
y'	0	∞	0
вывод	$+-$ max	$-+$ min	$+-$ max

Итак, функция имеет два максимума $y(-1) = 2$, $y(1) = 2$ и минимум $y(0) = 0$ (рис. 63, *д*).

7) Функция определена и непрерывна на сегменте $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$:

$$\varphi'(x) = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Найдем критические точки:

$$\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}} = 0, \quad 1 - x^2 = 0,$$

отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Теперь приравняем к нулю знаменатель выражения $\varphi'(x)$. Получим

$$\sqrt{2-x^2} = 0, \quad 2 - x^2 = 0,$$

отсюда $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$. Точки x_3 и x_4 не будут критическими, так как они не являются внутренними точками области определения функции.

Итак, критические точки функции: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Исследуем знак производной в окрестности этих точек. Из выраже-

ния $\varphi'(x)$ видно, что знак производной совпадает со знаком числителя, так как знаменатель в любой точке внутри области определения функции положительный.

Пусть $\varepsilon > 0$ (рис. 63, *е*), тогда $\varphi'(-1-\varepsilon) < 0$, так как $1-(-1-\varepsilon)^2 < 0$; $\varphi'(-1+\varepsilon) > 0$, так как $1-(-1+\varepsilon)^2 > 0$.

Следовательно, при прохождении через точку $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, имеем минимум $\varphi(-1) = -1$.

Аналогично $\varphi'(1-\varepsilon) > 0$, так как $1-(1-\varepsilon)^2 > 0$, $\varphi'(1+\varepsilon) < 0$, так как $1-(1+\varepsilon)^2 < 0$. Следовательно, в точке $x = 1$ имеем максимум $\varphi(1) = 1$ (рис. 63, *ж*).

Исследовать на экстремум следующие функции:

884. $y = x^2 + x + 1$.
885. $y = 2x^3 - 3x^2$.
886. $y = x^2 + ax + a^2$.
887. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.
888. $y = \frac{x}{x^2+x+1}$.
889. $y = 4x - x^4$.
890. $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.
891. $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 5$.
892. $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$.
893. $y = 2^{\sin x}$.
894. $y = x^3 - 6x^2 + 12x$.
895. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
896. $y = x + \sqrt{x^2+a^2}$.
897. $y = x\log_7 x$.
898. $y = x^{\frac{2}{3}} - x$.
899. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.
900. $y = e^{3-6x-x^2}$.
901. $y = x - \operatorname{arctg} x$.
902. $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$.
903. $y = \sqrt{3x-7}$.

§ 5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

1. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым (вогнутым)* на интервале (a, b), если дуга кривой $y = f(x)$ $(a < x < b)$ расположена ниже (соответственно выше) касательной, проведенной в любой точке этой дуги.

Если на (a, b) существует $f''(x)$, то достаточным условием выпуклости (вогнутости) является выполнение неравенства $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ при $a < x < b$.

2. Точки, в которых выпуклость изменяется на вогнутость или наоборот, называются *точками перегиба* (рис. 64).

Если $M(x_0; y_0)$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x_0) = 0$ или не существует.

Чтобы найти точки перегиба непрерывной кривой $y = f(x)$, надо определить значения x, при которых $f''(x) = 0$, а затем найти и те точки из области определения функции, в которых

вторая производная не существует. Эти точки называются *критическими точками второго рода*. Заметим, что критические точки лежат внутри области определения функции $y = f(x)$.

Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка $M(x_0; y_0)$ есть точка перегиба.

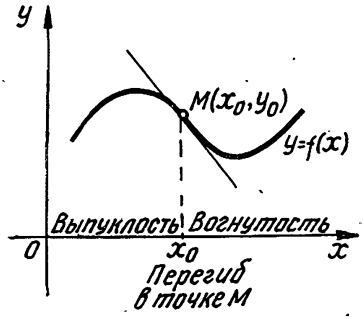


Рис. 64

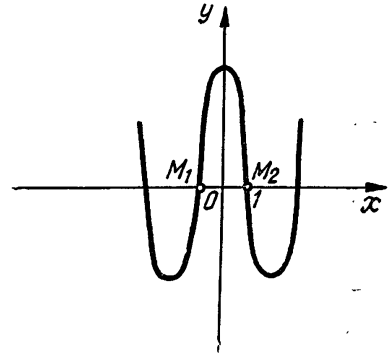


Рис. 65

904. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости (выпуклости) графиков следующих функций:

$$1)\ y = x^4 - 6x^2 + 5;\quad 2)\ y = x^{\frac{4}{3}};\quad 3)\ y = \sqrt[3]{x}.$$

Решение. 1) Найдем вторую производную:

$$y' = 4x^3 - 12x;\quad y'' = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1).$$

Решим уравнение $12(x^2 - 1) = 0$; $x = \pm 1$.

Исследуем знак второй производной в окрестности точек

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

При $x < -1$ $y'' > 0$ и при $x > -1$ $y'' < 0$. При $x < 1$ $y'' < 0$ и при $x > 1$ $y'' > 0$. Следовательно, точки перегиба: $M_1(-1; 0)$ и $M_2(1; 0)$.

Результаты исследования записаны в таблице:

x	-1	1
y	0	0
y''	0	0
вывод	$+\ -$ перегиб	$-\ +$ перегиб

В интервале $(-\infty, -1)$, где $y'' > 0$, кривая вогнута, в интервале $(-1, 1)$, где $y'' < 0$, выпукла и в интервале $(1, +\infty)$, где $y'' > 0$, вогнута (рис. 65).

2) $y' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$, $y'' = \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$. (а)

Производная y'' нигде в нуль не обращается. Приравнивая знаменатель дроби (а) к нулю, получаем

$$9\sqrt[3]{x^2} = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

В точке $x = 0$ вторая производная не существует ($y''(0) = \infty$). Исследуем знак второй производной в окрестности этой точки:

$$y''(0 - \varepsilon) > 0, \quad y''(0 + \varepsilon) > 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Точек перегиба нет.

На интервале $(-\infty, +\infty)$ вогнутость кривой направлена вверх.

3) $y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$. (б)

Приравнивая знаменатель дроби (б) к нулю, находим $9\sqrt[3]{x^5} = 0$, откуда $x = 0$.

В точке $x = 0$ вторая производная не существует ($y''(0) = \infty$). Исследуем знак второй производной в окрестности этой точки:

$$y''(-\varepsilon) > 0, \quad y''(\varepsilon) < 0.$$

Следовательно, в точке $M(0; 0)$ имеем перегиб. На интервале $(-\infty, 0)$ кривая вогнута, а на интервале $(0, \infty)$ выпукла (рис. 63, *а*).

Найти точки перегиба и интервалы вогнутости (выпуклости) графиков следующих функций:

905. $y = 3x^2 - 2$.

906. $y = x^3 + 1$.

907. $y = \ln(1 + x^2)$.

908. $y = 3x^3 - x$.

909. $f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$.

910. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

911. $y = \sin x$.

912. $y = e^{-x^2}$.

913. Чему должно быть равно h, чтобы абсциссами точек перегиба кривой Гаусса

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

были $x = \pm\sigma$?

914. Кривую $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$ исследовать на выпуклость и вогнутость. Найти точки перегиба.

915. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0).$$

§ 6. Асимптоты

Умение находить асимптоты кривой (см. гл. II, § 8) облегчает построение графика функции. Мы ограничимся нахождением горизонтальных и вертикальных асимптот.

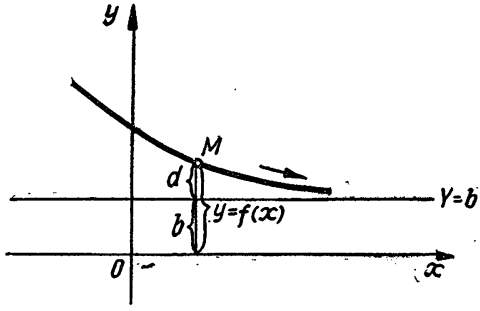


Рис. 66

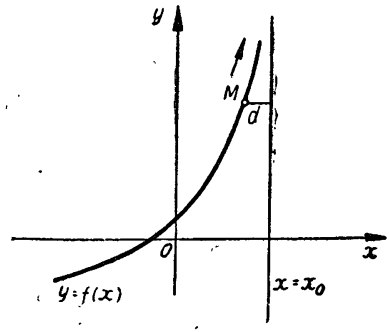


Рис. 67

Чтобы найти горизонтальные асимптоты графика функции $y = f(x)$, надо отыскать пределы

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b_1. \qquad (1)$$

Если пределы (1) конечные и различные, то прямые $Y = b$ и $Y = b_1$ будут горизонтальными асимптотами. Может оказаться, что только один из этих двух пределов конечный либо ни одного, тогда будет одна горизонтальная асимптота (рис. 66) либо ни одной.

Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 равен бесконечности $f(x_0 + 0) = \infty$ или $f(x_0 - 0) = \infty$, то прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота графика этой функции (рис. 67).

916. Найти асимптоты кривых:

1) $y = \frac{1}{x-2}$; 2) $y = \operatorname{arctg} x$;

3) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$; 4) $y = -e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. 1) Кривая имеет горизонтальную асимптоту $Y = 0$, т. е. ось Ox, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = 0$, и вертикальную асимптоту $x = 2$, так как $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$.

2) Кривая имеет две горизонтальные асимптоты $Y = \frac{\pi}{2}$ и $Y = -\frac{\pi}{2}$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

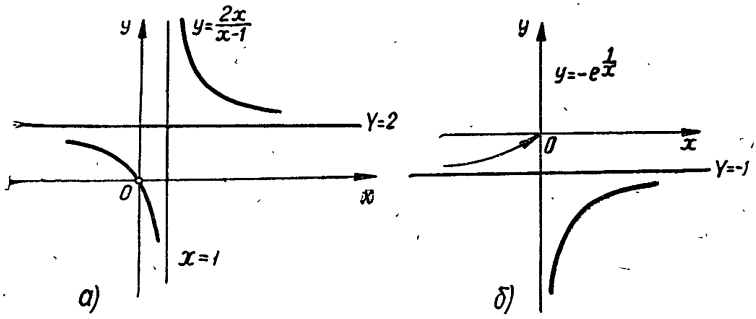


Рис. 68

3) Данная кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \frac{2x}{x-1} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{2x}{x-1} = +\infty$ ($x = 1$ есть точка разрыва функции второго рода).

Найдем горизонтальную асимптоту (рис. 68, *а*):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2, \text{ т. е } Y = 2.$$

4) Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to\infty} \left(-e^{\frac{1}{x}}\right) = -1, \text{ т. е. } Y = -1.$$

Теперь найдем вертикальную асимптоту:

$$\lim_{x\to+0} \left(-e^{\frac{1}{x}}\right) = -\lim_{t\to+\infty} e^t = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-0} \left(-e^{\frac{1}{x}}\right) = -\lim_{t\to-\infty} e^t = 0,$$

следовательно, $x = 0$, т. е. ось Oy есть вертикальная асимптота (рис. 68, *б*).

917. Найти асимптоты кривых:

1) $y = \frac{2x-1}{3x}$; 2) $y = \ln(x-1)$;

3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$; 4) $y = \frac{3x^2}{x^2+5}$.

§ 7. Построение графиков функций

При построении графика функции следует:
1) найти область определения функции;
2) определить четность (нечетность), периодичность функции;
3) найти точки разрыва;
4) определить точки пересечения графика с осями координат;
5) найти точки экстремума и вычислить значения функции в этих точках;
6) определить интервалы возрастания и убывания функции;
7) найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости;
8) определить асимптоты;
9) найти предельные значения функции при x, стремящемся к граничным точкам области определения.

В ходе построения графика по мере необходимости можно получить дополнительно ряд значений функции при некоторых частных значениях аргумента x, т. е. еще ряд точек графика. Разумеется, в процессе исследования функции не обязательно строго придерживаться приведенной схемы, иногда даже удобно изменить порядок плана.

918. Исследовать функции и построить их графики:

$$1)\ f(x)=3x-x^3;\quad 2)\ f(x)=x^4-2x^2+3;\quad 3)\ y=\frac{2}{1-x^2};$$

$$4)\ y=\frac{1}{1-\sqrt{1-x}};\quad 5)\ y=3\sqrt[3]{x^2}+2x.$$

Решение. 1) Функция $f(x)=3x-x^3$ определена и непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$, нечетна, поэтому ее график расположен симметрично относительно начала координат.

Найдем точки пересечения графика с осью Ox. При $y=0$ из данного уравнения найдем: $3x-x^3=0$, откуда $x_1=0$, $x^2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$, т. е. график функции пересекает ось Ox в точках $(0;\ 0)$, $(\sqrt{3};\ 0)$ и $(-\sqrt{3};\ 0)$.

Найдем первую и вторую производные: $f'(x)=3-3x^2=3(1-x^2)$, $3(1-x^2)=0$; откуда $x_1=-1$, $x_2=1$ — критические точки; $f''(x)=-6x$; $-6x=0$, $x=0$ — критическая точка второго рода.

В точке $x_1=-1$ имеем минимум, так как $f''(-1)=6>0$, и в точке $x_2=1$ — максимум, так как $f''(1)=-6<0$.

Точка $O(0;\ 0)$ есть точка перегиба, так как при переходе через значение $x=0$ вторая производная меняет знак с плюса на минус: $f''(-\varepsilon)=-6\cdot(-\varepsilon)=6\varepsilon>0$; $f''(\varepsilon)=-6\varepsilon<0$.

Следовательно, в интервале $(-\infty,\ 0)$ график функции вогнутый, а в интервале $(0,\ +\infty)$ выпуклый. Асимптот нет. Составим таблицу:

x	-1	0	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
y	-2	0	2	0	0
y'	0	3	0		
вывод	$\overset{-+}{\min}$	перегиб	$\overset{+-}{\max}$		

Из таблицы видно, что функция в интервале $(-\infty, -1)$ убывает ($y' < 0$), в интервале $(-1, 1)$ возрастает ($y' > 0$) и в интервале $(1, +\infty)$ убывает ($y' < 0$). Теперь построим график функции (рис. 69, *а*).

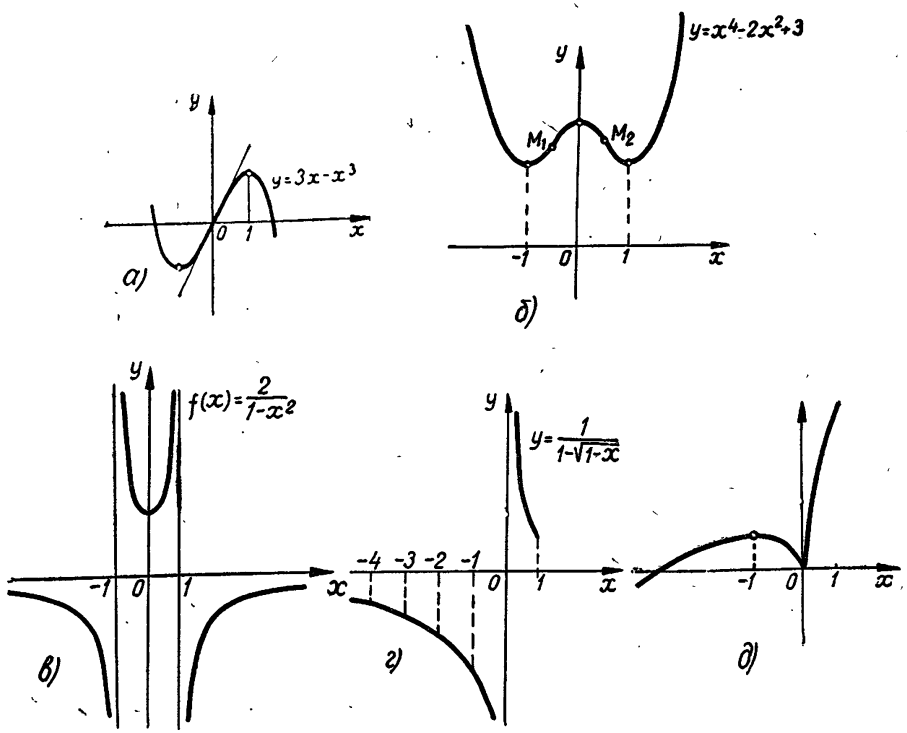


Рис. 69

2) Функция $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ определена и непрерывна на всей числовой оси, четная, поэтому ее график расположен симметрично относительно оси Oy. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пусть в данном уравнении

$x = 0$, тогда $y = 3$. Пусть $y = 0$, тогда $x^4 - 2x^2 + 3 = 0$. Нетрудно видеть, что корни этого уравнения комплексные, т. е. ось Ox график не пересекает.

Находим первую и вторую производные: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $4x(x^2 - 1) = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ — критические точки; $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$, $4(3x^2 - 1) = 0$, откуда $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ — критические точки второго рода;

$$f''(-1) = 8 > 0,\ f''(0) = -4 < 0,\ f''(1) = 8 > 0.$$

Следовательно, в точках $x_1 = -1$, $x_3 = 1$ функция имеет минимум и в точке $x = 0$ — максимум.

При переходе через точки $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ вторая производная меняет знак, отсюда следует, что $M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{22}{9}\right)$ и $M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{22}{9}\right)$ — точки перегиба. Составим таблицу:

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\approx 0{,}58)$	1	2
y	2	$\frac{22}{9}$	3	$\frac{22}{9}$	2	11
y'	0	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{8\sqrt{3}}{3}$	0	
вывод	$\underset{\min}{-+}$	перегиб	$\underset{\max}{+-}$	перегиб	$\underset{\min}{-+}$	

Из таблицы видно, что функция на интервале $(-\infty, -1)$ убывает ($y' < 0$), на интервале $(-1, 0)$ возрастает ($y' > 0$), на интервале $(0, 1)$ убывает ($y' < 0$) и на интервале $(1, +\infty)$ возрастает ($y' > 0$). Асимптот нет. Теперь построим график (рис. 69, *б*).

3) Функция $y = \frac{2}{1 - x^2}$ определена и непрерывна на всей числовой оси, за исключением точек $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, в которых функция имеет разрыв второго рода. Функция четная, поэтому график ее расположен симметрично относительно оси Oy. График пересекает ось Oy в точке $(0; 2)$. Найдем первую и вторую производные:

$$f'(x) = \frac{4x}{(1 - x^2)^2};\ f''(x) = 4\frac{3x^2 + 1}{(1 - x^2)^3}.$$

Из второй производной видно, что точек перегиба нет.

Далее, $f'(x) = 0$ при $x = 0$; $f''(0) = 4 > 0$, следовательно, в точке $x = 0$ имеем минимум, равный $f(0) = 2$.

Составим таблицу:

x	$-\infty$	0	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	2
y	0	2	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$
y'		0			
вывод		$\underset{\min}{-+}$			

Значения x, равные $\frac{1}{2}$ и 2, взяли дополнительно. Найдем асимптоты кривой:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0,$$

следовательно, имеем горизонтальную асимптоту $Y = 0$, а также две вертикальные $x = 1$ и $x = -1$.

Теперь построим график функции (рис. 69, *в*).

4) Функция $y = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$ определена при условии, если $1 - x \geqslant 0$, т. е. при всех $x \leqslant 1$, за исключением точки $x = 0$, в которой функция имеет разрыв второго рода.

Область определения состоит из двух промежутков: $(-\infty, 0)$ и $(0, 1]$.

Функция в области определения убывает, так как в указанных промежутках ее производная

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}(1-\sqrt{1-x})^2} < 0.$$

Критических точек нет.

Вертикальная асимптота $x = 0$, т. е. ось Oy, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$. Горизонтальная асимптота $Y = 0$, так как

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = 0.$$

Составим таблицу:

x	$-\infty$	1	$\frac{1}{2}$	-1	-3
y	0	1	3,41	—2,41	-1

где $f(-1) \approx -2{,}41$; $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 3{,}41$.

Теперь построим график (рис. 69, *г*).

5) Функция $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$ определена и непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$. Функция не является ни четной, ни нечетной.

Найдем первую и вторую производные:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 2 = \frac{2\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}; \qquad \text{(а)}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}. \qquad \text{(б)}$$

Найдем критические точки:

$$f'(x) = 0, \text{ т. е. } \frac{2\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} = 0,$$

откуда $1 + \sqrt[3]{x} = 0$, $x = -1$.

Приравняем знаменатель дроби (а) к нулю:

$$\sqrt[3]{x} = 0, \quad x = 0.$$

Нашли точку $x = 0$ из области определения функции, в которой производная не существует. Следовательно, точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ критические.

Найдем критические точки второго рода. Вторая производная $f''(x) \neq 0$. Приравняем знаменатель дроби (б) к нулю: $3\sqrt[3]{x^4} = 0$, $x = 0$. В точке $x = 0$ вторая производная не существует, следовательно, это критическая точка второго рода.

Исследуем критические точки: $f''(-1) = -\frac{2}{3} < 0$, т. е. в точке $x_1 = -1$ функция имеет максимум.

Далее, в точке $x_2 = 0$ функция имеет минимум, так как при переходе через эту точку первая производная меняет знак с минуса на плюс (второе правило в данном случае неприменимо, так как в точке $x = 0$ вторая производная не существует).

При переходе через критическую точку второго рода $x = 0$ вторая производная не меняет знак, следовательно, точки перегиба нет.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если в данном уравнении $x = 0$, то $y = 0$. Если $y = 0$, то $3\sqrt[3]{x^2} + 2x = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{27}{8}$. Следовательно, график пересекает оси координат в точках (0; 0) и $\left(-\frac{27}{8}; 0\right)$. Составим таблицу:

x	-1	0	$-\frac{27}{8}$	1
y	1	0	0	5
y'	0	∞		
вывод	$+ \underset{\max}{-}$	$- \underset{\min}{+}$		

Из таблицы видно, что в интервале $(-\infty, -1)$ функция возрастает ($y' > 0$), в интервале $(-1, 0)$ убывает ($y' < 0$), в интервале $(0, +\infty)$ возрастает ($y' > 0$). В интервале $(-\infty, +\infty)$ кривая выпуклая, так как $y'' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}} < 0$ в этом интервале. Асимптот нет (рис. 69, *д*).

Исследовать функции и построить их графики:

919. 1) $y = x^2 - 6x + 3$; 2) $y = x^2 + x + 5$.

920. 1) $y = -2x^2 + 3x + 1$; 2) $y = x(2 - x)^2$.

921. 1) $y = \frac{1}{5}(x^3 - 6x^2 + 25)$; 2) $y = 2x^3 - 3x + 1$.

922. $y = x^3 - 5x^2 + 8x$.

923. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

924. $y = \frac{2}{x^2 + x + 1}$.

925. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

926. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$.

927. $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$.

928. $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 (x - 2)^3$.

929. $y = x + \sin x$.

930. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.

931. $y = x + \frac{1}{x}$.

932. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$.

933. $y = x \ln |x|$.

934. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ $(a > 0)$.

935. $y = \frac{1}{x} 2^x$.

936. $y = x^3 e^{-x}$.

937. $y = x^x$.

938. $y = e^{2x - x^2}$.

§ 8. Наибольшее и наименьшее значения функции

1. Чтобы найти наибольшее значение непрерывной функции в промежутке $[a, b]$, надо определить все максимумы и значения функции на концах промежутка $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее из этих чисел и будет наибольшим значением функции $f(x)$ в указанном промежутке. Наименьшее значение функции находится аналогично.

939. Найти наибольшие и наименьшие значения данных функций в указанных промежутках:

1) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на сегменте $[-2, 2]$;

2) $y = \operatorname{tg} x - x$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение. 1) Найдем критические точки:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x,\ 4x(x^2 - 4) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2;$$

$$f''(x) = 4(3x^2 - 4);\ f''(0) = -16 < 0.$$

В точке $x_1 = 0$ имеем максимум, равный $f(0) = 3$. Точки $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$ принадлежат концам промежутка. Найдем значения функции на концах: $f(-2) = -13$, $f(2) = -13$. Итак, наибольшее значение равно 3, наименьшее значение равно -13.

2) Найдем производную

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Внутри сегмента экстремума нет, так как $y' > 0$ в $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (за исключением точки $x = 0$, в которой $y' = 0$), т. е. функция на этом промежутке монотонно возрастает. Наименьшее значение функции достигается на одном конце промежутка, оно равно $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$, а наибольшее — на другом конце, оно равно $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

940. Найти наибольшие и наименьшие значения данных функций в указанных промежутках:

1) $y = x^3$ на сегменте $[-2, 3]$;

2) $y = 2x - \sqrt{x}$ на сегменте $[0, 4]$;

3) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ на сегменте $[-3, 3]$.

2. До сих пор мы находили экстремум данной функции, а теперь по условию задачи будем составлять функцию и исследовать эту функцию на экстремум.

941. Изготовить из куска картона 30×14 ($см^2$) коробку (без крышки) наибольшей вместимости, вырезая равные квадраты по углам и затем загибая картон для образования боков коробки (рис. 70).

Решение. Площадь основания коробки $S = (14 - 2x)(30 - 2x)$, высота $H = x$. Объем коробки $V = SH = 4x(7-x)(15-x)$.

Исследуем эту функцию: $V'(x) = 4(3x^2 - 44x + 105)$. Корни производной будут $x_1 = 11\frac{2}{3}$, $x_2 = 3$.

Далее, $V''(x) = 8(3x - 22)$, $V''(3) < 0$. В точке $x = 3$ имеем максимум. Из условия задачи видно, что значение $x_1 = 11\frac{2}{3}$ для данной задачи не имеет смысла.

Следовательно, при $x = 3$ *см* наибольший объем $V = 576$ *см*^{3}.

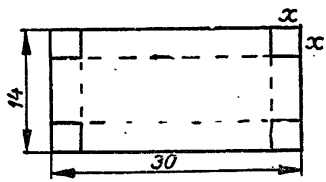


Рис. 70

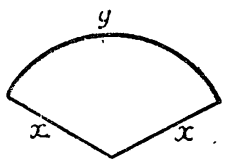


Рис. 71

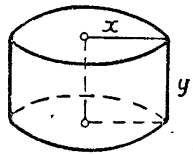


Рис. 72

942. Проволокой длиною 20 *м* требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

Решение. Обозначим радиус круга через x, а длину дуги сектора — через y (рис. 71). Площадь кругового сектора $S = \frac{1}{2}xy$. Функция S подлежит исследованию на максимум. Заметим, что S зависит от двух переменных x и y. Выразим y через x (можно и наоборот). Согласно условию задачи, периметр кругового сектора равен 20 *м*, т. е. $2x + y = 20$ (уравнение связи), отсюда $y = 2(10 - x)$.

Следовательно,

$$S(x) = x(10 - x),$$

$$S'(x) = 10 - 2x,\ 10 - 2x = 0,\ x = 5,$$

$$S''(x) = -2,\ S''(5) = -2 < 0 \text{ (max)}.$$

Таким образом, надо взять радиус, равный 5 *м*.

943. Бак цилиндрической формы должен вмещать V *л* воды. Каковы должны быть его размеры, чтобы поверхность (без крышки) была наименьшей?

Решение.

$$V = \pi x^2 y \text{ (уравнение связи)}, \qquad \text{(а)}$$

где x — радиус основания цилиндра, а y — его высота (рис. 72).

Поверхность

$$S = \pi x^2 + 2\pi xy \qquad \text{(б)}$$

(функция, подлежащая исследованию на минимум). Из уравнения (а) определяем $y = \frac{V}{\pi x^2}$. Подставив в формулу (б) значение y, получим:

$$S(x) = \pi x^2 + \frac{2V}{x};\ S'(x) = 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0;\ x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}};$$

$$S''(x) = 2\pi + \frac{4V}{x^3},\ S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right) > 0,$$

т. е. в точке $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ функция $S(x)$ имеет минимум.

Итак, радиус цилиндра $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, высота $y = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, следовательно, $x = y = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

944. Из всех прямоугольников, имеющих периметр, равный $2a$, найти тот, площадь которого наибольшая.

945. Число 12 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

946. Число 36 представить в виде двух положительных сомножителей так, чтобы сумма их была наименьшей.

947. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

948. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 *м*. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

949. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

950. Нужно построить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трех сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвертой стороной примыкала к стене. Для этого имеется a погонных метров сетки. При каком соотношении сторон площадка будет иметь наибольшую площадь?

951. Консервная банка данного объема имеет форму цилиндра. Каково должно быть соотношение ее размеров (высоты и диаметра), чтобы на изготовление пошло минимальное количество жести?

952. Каковы должны быть коэффициенты p и q трехчлена

$$x^2 + px + q,$$

чтобы этот трехчлен при $x = 2$ имел минимум, равный 1?

953. В треугольник с основанием b и высотой h вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

954. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

955. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр с полушарием сверху. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен V?

956. Резервуар, который должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда (сверху открытого) с квадратным основанием, нужно вылудить внутри оловом. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его лужение пошло наименьшее количество олова, если он должен вмещать 108 *л* воды?

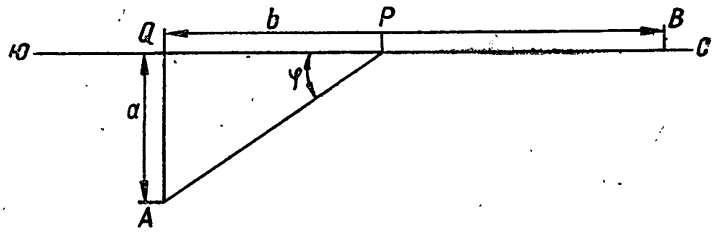


Рис. 73

957. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

958. Полоса железа шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сектора). Найти значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при котором вместимость желоба будет наибольшей.

959. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр задан. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

960. Город B стоит на железной дороге, идущей с юга на север. Завод A расположен южнее города B на b *км* и отстоит от железной дороги на a *км*. Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A и B была наиболее экономичной, если стоимость провоза 1 m груза на расстояние 1 *км* по подъездному пути обходится в k раз дороже, чем по железной дороге (произвести исследование) (рис. 73)?

961. Расходы на топливо для парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости 10 *км/ч* расходы на топливо составляют 30 *руб/ч*. Остальные же расходы

(не зависящие от скорости) составляют 480 *руб/ч*. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 *км* пути будет наименьшей? Какова при этом будет общая сумма расходов в час?

962. Над центром круглой площадки радиуса $R = 10$ *м* нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы края площадки были максимально освещены (степень освещенности некоторой площадки пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

963. Из круглого бревна диаметром d требуется вытесать балку прямоугольного поперечного сечения так, чтобы она, находясь в горизонтальном положении, оказала наибольшее сопротивление на изгиб (известно, что сопротивление прямо пропорционально произведению ширины сечения на квадрат высоты). Каковы должны быть размеры сечения балки?

Глава VII Функции нескольких переменных

§ 1. Функции нескольких переменных и их области определения

Переменная z называется *однозначной функцией* от переменных x и y, если каждой паре значений x и y из области их изменения по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение z.

Переменные x и y называются *независимыми переменными* или *аргументами*, z — *зависимой переменной*.

Функциональная зависимость обозначается так: $z = f(x, y)$.

Областью определения функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости xOy, в которых данная функция определена, т. е. принимает действительные значения. Геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность в пространстве. Частное (числовое) значение функции $f(x, y)$ при $x = x_0$, $y = y_0$ обозначается так: $f(x_0, y_0)$.

Аналогично определяются функции от большего числа переменных:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

964. Найти частное значение функций:

1) $f(x, y) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ при $x = 5$, $y = 3$;

2) $\varphi(x, y, z) = 3x + \lg\frac{2x+y}{\sqrt{x^2+z}}$ при $x = 1$, $y = -1$, $z = 99$.

Решение. 1) $f(5; 3) = \frac{2\cdot 5}{\sqrt{5^2-3^2}} = \frac{10}{4} = 2{,}5$.

2) $\varphi(1; -1; 99) = 3\cdot 1 + \lg\frac{2\cdot 1-1}{\sqrt{1^2+99}} = 3 + \lg 0{,}1 = 2$.

965. Найти области определения следующих функций:

1) $z = x + y - 1$; 2) $f(x, y) = \frac{x+1}{x^2+y^2}$;

3) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; 4) $u = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$;

5) $\varphi(x, y) = x - \arcsin y$; 6) $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Решение. 1) Функция определена на всей плоскости xOy. Геометрическим изображением данной функции будет плоскость в пространстве.

2) Функция определена на всей плоскости за исключением точки $O(0; 0)$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль.

3) Функция определена при значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, откуда $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Таким образом, область определения функции есть круг с центром в начале координат и радиусом $r = 2$ (включая и его границу — окружность $x^2 + y^2 = 4$). Геометрическим изображением данной функции является полусфера, расположенная в октантах I—IV ($z \geqslant 0$).

4) Функция существует лишь для тех пар значений x и y, которые удовлетворяют неравенству

$$9 - x^2 - y^2 > 0,$$

откуда $x^2 + y^2 < 9$. Следовательно, область определения функции есть круг с центром в начале координат и радиусом $r = 3$ (не включая границу круга, т. е. окружность $x^2 + y^2 = 9$).

5) Функция определена при условии, что $-1 \leqslant y \leqslant 1$, и при любых значениях x. Следовательно, область определения функции есть полоса, заключенная между двумя прямыми $y = -1$ и $y = 1$, включая и эти прямые (рис. 74, *а*).

6) Функция определена при значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $xy > 0$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$). Следовательно, область определения функции есть множество точек, лежащих внутри I и III квадратов (рис. 74, *б*).

966. Найти частное значение функции:

1) $f(x, y) = \frac{x+2y}{x-y}$ при $x = 3$, $y = 1$;

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = -3$, $y = 4$;

3) $\varphi(x, y, z) = xy - \frac{z}{x+y}$ при $x = 2$, $y = 1$, $z = 6$.

Найти области определения следующих функций:

967. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. 968. $z = \sqrt{x - 2y}$.

969. $z = \frac{1}{x + y - 1}$. 970. $z = \frac{1}{(x-1)(y-2)}$.

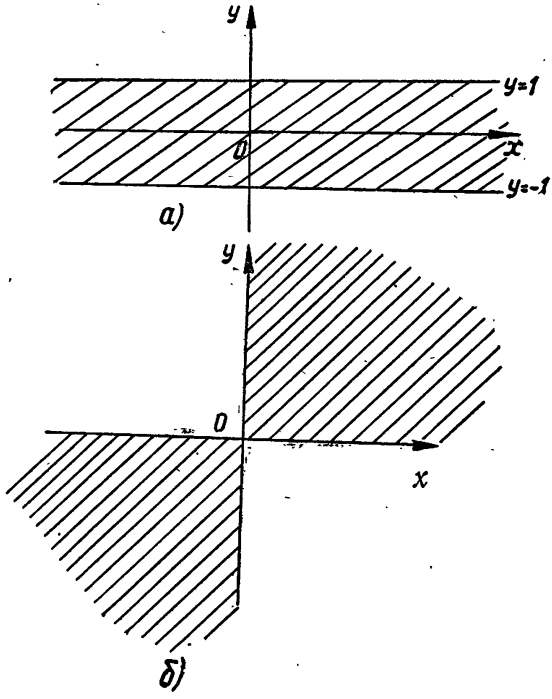


Рис. 74

971. $z = \sqrt{xy}$. 972. $z = \frac{1}{x-2} - \ln(xy)$.

973. $z = \ln x + \sqrt{y}$. 974. $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

975. $z = y + \arcsin(x + 2)$.

§ 2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

1. Говорят, что последовательность точек $\{(x_n, y_n)\}$ сходится к точке (x_0, y_0), если

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0 \quad (d_n = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}).$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена внутри некоторого круга K с центром в точке (x_0, y_0), за исключением, может быть, самой точки (x_0, y_0).

Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любой последовательности точек $\{(x_n, y_n)\}$ области определения функции, отличных от (x_0, y_0) и сходящихся к (x_0, y_0), последовательность значений функции $\{f(x_n, y_n)\}$ сходится к A. В этом случае пишут:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A.$$

2. Если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \qquad (1)$$

то функция $f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке (x_0, y_0). Из предела (1) следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0, \qquad (2)$$

т. е. если функция непрерывна в точке (x_0, y_0), то бесконечно малым приращениям аргументов Δx и Δy в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции Δz. Справедливо и обратное предложение: если бесконечно малым приращениям аргументов отвечает бесконечно малое приращение функции, то функция непрерывна, так как в этом случае из соотношения (2) следует предел (1). Разумеется, функция определена в точке (x_0, y_0) и вблизи этой точки.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

976. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{y}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x \dfrac{\operatorname{tg} xy}{xy} = 2\cdot 1 = 2,$

так как

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1.$$

2) Воспользуемся определением предела функции в точке. Возьмем последовательности $x = \frac{1}{n} \to 0$, $y = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$,

тогда $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 2.$$

Теперь возьмем $x = \frac{1}{n} \to 0$, $y = \frac{2}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = 3.$$

Итак, при различных последовательностях точек, сходящихся к точке (0; 0), получаем различные пределы. Это означает, что предел функции в этой точке не существует (см. п. 1).

Заметим, что данная функция в точке (0; 0) не определена.

Найти следующие пределы:

977. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} (x^2 + y^2)$.

978. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -1}} \sqrt{x-y}$.

979. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}} (x^2 - y^2)$.

980. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 7}} \lg(x+y)$.

981. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{x^2+y^2+1}$.

982. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{x+1}{y-1}$.

983. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{1-xy}{x^2+y^2}$.

984. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{x}$.

Доказать непрерывность следующих функций в указанных точках:

985. $f(x, y) = x^2 + y^2$ в точке $(x; y)$.

986. $f(x, y) = |x| + |y|$ в точке (0; 0).

987. $f(x, y) = |x + y|$ в точке $(x; y)$.

988. $f(x, y) = x \sin y$ в точке $(1; \pi)$.

§ 3. Частные производные

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции z по x в точке $(x_0; y_0)$ и обозначается символами

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ или } f'_x(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется частная производная по y:

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

989. Найти частные производные следующих функций:

1) $z = x^3 + x^2y + y^3$;

2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке $(5; -3)$;

3) $\varphi(x, y) = 2^{xy}$ в точке $(0; 3)$.

Решение. 1) Рассматривая y как постоянную величину, дифференцируем функцию по переменной x. Используя известные формулы и правила гл. V, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2.$$

2) $f'_x(x, y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$;

$f'_y(x, y) = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Теперь найдем частные производные в указанной точке:

$$f'_x(5; -3) = \frac{5}{\sqrt{5^2 - (-3)^2}} = \frac{5}{4}; \quad f'_y(5; -3) = \frac{-(-3)}{\sqrt{5^2 - (-3)^2}} = \frac{3}{4}.$$

3) $\varphi'_x(x, y) = 2^{xy}(xy)'_x \ln 2 = y2^{xy} \ln 2$;

$\varphi'_y(x, y) = 2^{xy}(xy)'_y \ln 2 = x2^{xy} \ln 2$;

$\varphi'_x(0; 3) = 3 \cdot 2^{0 \cdot 3} \ln 2 = 3 \ln 2$; $\varphi'_y(0; 3) = 0 \cdot 2^{0 \cdot 3} \ln 2 = 0$.

Найти частные производные следующих функций:

990. $z = xy$ в точке $(0; 0)$.

991. $z = x^2 + y^2$ в точке $(-2; 0{,}5)$.

992. $z = x^2 + xy + y^2$ в точке $(1; 2)$.

993. $z = x \operatorname{tg}(y + 1)$ в точке $(1; -1)$.

994. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ в точке $(3; 3)$.

995. $z = \frac{x}{\sin y}$ в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

996. $z = x^y$.

997. $z = y^{\sin x}$.

998. $z = \frac{x+y}{x-y}$.

999. $z = x \ln y + \arcsin y$.

1000. $z = \frac{xy}{x-y}$.

1001. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

§ 4. Полный дифференциал функции

1. *Полным приращением* функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (1)$$

2. Линейная часть приращения функции $z = f(x, y)$ относительно приращений аргументов Δx и Δy называется ее *полным дифференциалом* и обозначается символом dz или $df(x, y)$.

Функция $f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $(x; y)$, если она имеет полный дифференциал в этой точке.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ обычно находится по формуле

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy, \quad (2)$$

где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

3. При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$

$$\Delta z \approx dz$$

или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y. \quad (3)$$

1002. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 + xy$ при $x = 2$; $y = 1$; $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$.

Решение. Воспользуемся формулой (1) и определением полного дифференциала функции $z = f(x, y)$:

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (x^2 + xy) =$$
$$= (2x + y)\,\Delta x + x\Delta y + \Delta x^2 + \Delta x \Delta y,$$

откуда

$$dz = (2x + y)\,\Delta x + x\Delta y.$$

Подставляя в эти выражения данные значения x, y, Δx, Δy, получаем:

$\Delta z = (2 \cdot 2 + 1)\,0{,}01 + 2 \cdot 0{,}02 + (0{,}01)^2 + 0{,}01 \cdot 0{,}02 = 0{,}0903$;

$dz = (2 \cdot 2 + 1)0{,}01 + 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}09$.

1003. Найти полные дифференциалы функций:

1) $z = 5x^2y^3$; 2) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + 3y)$.

Решение. 1) Сначала найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 15x^2y^2.$$

По формуле (2) получим

$$dz = 10xy^3dx + 15x^2y^2dy = 5xy^2(2ydx + 3xdy).$$

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+3y)'_x}{1+(x^2+3y)^2} = \frac{2x}{1+(x^2+3y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+3y)'_y}{1+(x^2+3y)^2} = \frac{3}{1+(x^2+3y)^2}$; $dz = \frac{1}{1+(x^2+3y)^2}(2xdx + 3dy)$.

1004. Вычислить приближенно:

1) $(0{,}96)^2(1{,}02)^3$; 2) $(1{,}02)^{3{,}05}$.

Решение. 1) $(0{,}96)^2(1{,}02)^3$ есть частное значение функции $f(x, y) = x^2y^3$. Воспользовавшись формулой (3), получим

$$(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)^3 \approx x^2y^3 + 2xy^3\Delta x + 3x^2y^2\Delta y.$$

Пусть $x = 1$, $y = 1$, тогда $\Delta x = -0{,}04$, так как $1 + \Delta x = 0{,}96$, $\Delta y = 0{,}02$, так как $1 + \Delta y = 1{,}02$.

Следовательно, $(0{,}96)^2(1{,}02)^3 \approx 1^2\cdot 1^3 + 2\cdot 1\cdot 1^3\cdot(-0{,}04) + 3\cdot 1^2\cdot 1^2\cdot 0{,}02 = 1 - 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}98$.

2) $(1{,}02)^{3{,}05}$ есть частное значение функции $z = x^y$. Воспользовавшись формулой (3), получим

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + (x^y)'_x\Delta x + (x^y)'_y\Delta y = x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y\ln x\Delta y.$$

Пусть $x = 1$, $y = 3$, тогда $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}05$.

Следовательно, $(1{,}02)^{3{,}05} \approx 1^3 + 3\cdot 1^{3-1}\cdot 0{,}02 + 1^3\ln 1\cdot 0{,}05 = 1 + 0{,}06 + 0 = 1{,}06$.

Найти полные дифференциалы следующих функций:

1005. $u = x + y + z$. **1006.** $z = 2x + 3y$.

1007. $u = xyz$. **1008.** $f(x, y) = \frac{x}{y}$ в точке $(1; 2)$.

1009. $z = y^x$. **1010.** $z = x2^y$.

1011. $z = x^2 + \sin y$. **1012.** $z = \ln(x^2 + y^2)$.

1013. Вычислить значение полного дифференциала функции $z = x^3 + y^4$ при $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0{,}03$, $dy = -0{,}01$.

Вычислить приближенно:

1014. $0{,}98^{1{,}05}$. **1015.** $1{,}03\cdot 9{,}98$.

1016. $\sqrt{1{,}02^4 + 1{,}98^3}$. **1017.** $\sqrt[3]{2{,}01^3 + 117{,}1}$.

1018. $\sqrt{12 + (2{,}02)^2}\cdot\operatorname{tg} 44°$. **1019.** $(6{,}03)^3\sin 29°$.

§ 5. Экстремум функции многих переменных

1. Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум (минимум) $f(x_0, y_0)$, если вблизи этой точки для всех точек M, отличных от M_0, выполняется условие

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) > f(x_0, y_0)).$$

2) Рассмотрим необходимое условие экстремума. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$ и имеет экстремум, то частные производные в этой точке равны нулю, т. е.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

1020. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 4.$$

Решение. Найдем частные производные

$$f'_x(x, y) = 2x; \quad f'_y(x, y) = 2y - 4.$$

Приравняем их к нулю, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y - 4 = 0, \end{cases}$$

отсюда $x = 0$, $y = 2$.

Данная функция в найденной критической точке $M_0(0; 2)$ имеет минимум $f(0; 2) = 4 - 8 + 4 = 0$, так как вблизи этой точки для любых точек $M(x; y)$, отличных от $M_0(0; 2)$, значения функции больше нуля. Например, пусть $x = 0$, $y = 1$, тогда $f(0; 1) = 1 - 4 + 4 = 1 > 0$; пусть $x = -1$, $y = 3$, тогда $f(-1; 3) = 1 + 9 - 12 + 4 = 2 > 0$.

1021. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данный объем V, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.

Решение. Пусть x, y, z — размеры данного параллелепипеда. Тогда объем его $V = xyz$ (уравнение связи). Полная поверхность параллелепипеда

$$S = 2xy + 2(x + y)z.$$

Из уравнения связи найдем $z = \frac{V}{xy}$ и полученное значение подставим в выражение функции S, подлежащей исследованию на экстремум:

$$S = 2xy + 2(x + y)\frac{V}{xy} = 2\left(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right).$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2\left(y - \frac{V}{x^2}\right), \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2\left(x - \frac{V}{y^2}\right)$$

и составим систему уравнений

$$\begin{cases} y - \frac{V}{x^2} = 0, \\ x - \frac{V}{y^2} = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2y - V = 0, \\ xy^2 - V = 0, \end{cases}$$

откуда $x = y = \sqrt[3]{V}$. Подставляя значения x и y в уравнение связи, получим $z\sqrt[3]{V^2} = V$, откуда $z = \sqrt[3]{V}$.

Следовательно, искомый параллелепипед есть куб.

Исследовать на экстремум следующие функции:

1022. $z = x^2 + y^2$. **1023.** $z = (x-1)^2 + y^2$.

1024. $z = xy$. **1025.** $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

1026. $z = e^{-(x^2+y^2)}$. **1027.** $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.

1028. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

1029. $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$.

1030. $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - y^2$.

1031. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ l, найти тот, объем которого наибольший.

1032. Стоимость сооружения 1 $м^2$ стен фасада равна p, а 1 $м^2$ остальных стен — q, стоимость крыши за 1 $м^2$ ее основания — s. Каковы должны быть соотношения между длиной, шириной, высотой для углового дома объемом V $м^3$, чтобы стоимость его стен и крыши была минимальной?

1033. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

1034. Определить размеры прямоугольного бассейна данного объема V так, чтобы на облицовку его поверхности потребовалось наименьшее количество материала.

1035. Определить размеры прямоугольного бассейна так, чтобы при данной площади его поверхности S объем был наибольшим.

Глава VIII Неопределенный интеграл

§ 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов

1. В дифференциальном исчислении одной из основных задач является нахождение производной или дифференциала от данной функции $F(x)$:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

или

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

В интегральном исчислении основной является обратная задача — отыскание функции $F(x)$ по заданной ее производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)\,dx$, т. е. для данной функции $f(x)$ надо найти такую функцию $F(x)$, что

$$F'(x) = f(x)$$

или

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, а дифференциал $f(x)\,dx$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$.

Приведем примеры. 1) Если $f(x) = x^3$, то первообразная будет $F(x) = \frac{x^4}{4}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

2) Если $f(x) = \sin x$, то $F(x) = -\cos x$, так как $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x$.

Заметим, что если $F(x)$ — первообразная функция для функции $f(x)$, то и $\Phi(x) = F(x) + C$ (C — произвольная постоянная) есть также первообразная функция, так как

$$\Phi'(x) = [F(x) + C]' = f(x).$$

Например, пусть $f(x) = \cos x$, тогда $\Phi(x) = \sin x + C$ будет первообразной функцией для данной функции $f(x)$, так как

$$\Phi'(x) = (\sin x + C)' = \cos x.$$

Общее выражение $F(x) + C$ совокупности всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

2. Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами.

I. Постоянный множитель ($a \neq 0$) можно выносить за знак интеграла: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

II. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx.$$

III. $[\int f(x)\,dx]' = f(x)$ или $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

IV. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$ или $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Таблица основных интегралов:

$$\int 0 \cdot dx = C; \tag{1}$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C; \tag{2}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1); \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \tag{4}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \tag{5}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C; \tag{6}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \tag{7}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C; \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C; \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1 \ (a > 0); \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C_1 \ (a \neq 0); \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \ (a \neq 0); \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad (a \neq 0). \tag{14}$$

Справедливость формул можно проверить путем дифференцирования, т. е. надо убедиться в том, что производные от правых частей формул будут равны соответственно подынтегральным функциям. Так, если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$F'(x) = f(x).$$

Остановимся сначала на формуле (4). Эта формула применима для любых $x \neq 0$.

Действительно, если $x > 0$, то $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, так как

$$F(x) = \ln x \quad \text{и} \quad F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Если же $x < 0$, то $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$, так как

$F(x) = \ln(-x)$ и $F'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$. Обе эти формулы объединены в формуле (4).

Итак, если $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, то $F(x) = \ln|x|$ и $F'(x) = \frac{1}{x}$.

Теперь убедимся в справедливости формулы (14):

$$F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|;$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}};\quad F'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}(x+\sqrt{x^2+a})'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{(x+\sqrt{x^2+a})\sqrt{x^2+a}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}},\ \text{т. е. } F'(x)=f(x).$$

Аналогичным способом можно проверить и все остальные формулы. Заметим, что каждая из формул таблицы справедлива в любом промежутке, содержащемся в области определения подынтегральной функции.

Интегралы таблицы называются *табличными*.

§ 2. Непосредственное интегрирование

Пользуясь таблицей интегралов и I и II свойствами неопределенного интеграла (основными правилами интегрирования), можно вычислить многие интегралы. При проверке результата интегрирования, как уже говорилось выше, надо помнить, что если

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

то $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)\,dx$.

Приведем примеры.

1) $\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C$. Воспользовались формулой (3)*.

2) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}=\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}+C=$

$$=-\frac{2}{3x^{\frac{3}{2}}}+C=-\frac{2}{3x\sqrt{x}}+C\ [(3)].$$

3) $\int 3x^2(x+2)\,dx=\int(3x^3+6x^2)\,dx=\int 3x^3dx+\int 6x^2dx=$

$$=3\int x^3dx+6\int x^2dx=3\frac{x^4}{4}+C_1+6\frac{x^3}{3}+C_2=$$

$$=\frac{3}{4}x^4+2x^3+C\ [\text{II, I; (3)}].$$

Замечание 1. Несколько постоянных интегрирования можно объединять в одну, например вместо суммы $C_1+C_2+C_3$ можно написать C.

---

* В дальнейшем будем указывать в скобках номера формул и правил, которыми мы воспользовались.

4) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx = \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}dx =$

$= \int \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - x^{-2}\right)dx = \frac{1}{3}\int x dx + \frac{1}{3}\int dx - \int \frac{dx}{x} -$

$- \int x^{-2}dx = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$ [II; (1), (3), (2), (4)].

Замечание 2. Для применения правила II часто бывает необходимо подынтегральную функцию преобразовать к виду алгебраической суммы, что и было сделано в примерах 3 и 4.

5) $\int \frac{3x+1}{x+2}dx = \int \frac{3(x+2)-5}{x+2}dx = \int \left(3 - \frac{5}{x+2}\right)dx =$

$= 3\int dx - 5\int \frac{dx}{x+2} = 3x - 5\ln|x+2| + C$ [II, I; (3), (2), (4)].

Фактически мы здесь разделили числитель на знаменатель, т. е. из неправильной алгебраической дроби выделили целую часть*.

6) Найти интеграл $\int \frac{x^3+2x^2+5x+13}{x^2+5}dx$.

Решение. Данная дробь неправильная. Разделив числитель на знаменатель (исключив целое), получим:

$\int \frac{x^3+2x^2+5x+13}{x^2+5}dx = \int \left(x+2+\frac{3}{x^2+5}\right)dx = \int x dx + 2\int dx +$

$+ 3\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$ [II, I; (3), (2), (12)].

7) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ [(5)].

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin\frac{x}{4} + C$ [(11)].

9) $\int \frac{dx}{x^2-7} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right| + C$ [(13)].

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} = \ln|x+\sqrt{x^2-3}| + C$ [(14)].

1036. Найти следующие интегралы и результаты проверить дифференцированием:

1) $\int (x^2 - 2\sin x + 3e^x)\,dx$; 2) $\int (\sec^2 x - 3\cos x + 1)\,dx$;
3) $\int (\csc^2 x + 7\sin x - 2)\,dx$.

---

* Алгебраическая рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, если же степень числителя больше или равна степени знаменателя то дробь называется *неправильной*.

Решение. 1) $\int (x^2 - 2\sin x + 3e^x)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2\cos x + 3e^x + C$ [I, II; (3), (7), (6)].

Проверка. Найдем производную полученной функции $F(x) + C$ и убедимся, что она равна подынтегральной функции $f(x)$:

$$\left(\frac{x^3}{3} + 2\cos x + 3e^x + C\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (2\cos x)' + (3e^x)' + (C)' = x^2 - 2\sin x + 3e^x.$$

2) $\int (\sec^2 x - 3\cos x + 1)\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 3\int \cos x\,dx + \int dx = \operatorname{tg} x - 3\sin x + x + C$ [II, I; (10), (8), (2)].

Проверка. Найдем дифференциал полученной функции $F(x) + C$ и убедимся, что он равен подынтегральному выражению $f(x)\,dx$:

$$d(\operatorname{tg} x - 3\sin x + x + C) = (\operatorname{tg} x - 3\sin x + x + C)'\,dx = (\sec^2 x - 3\cos x + 1)\,dx.$$

3) $\int (\operatorname{csc}^2 x + 7\sin x - 2)\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + 7\int \sin x\,dx - 2\int dx = -\operatorname{ctg} x - 7\cos x - 2x + C$ [II, I; (9), (7), (2)].

Проверка. $d(C - \operatorname{ctg} x - 7\cos x - 2x) = (C - \operatorname{ctg} x - 7\cos x - 2x)'\,dx = \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 7\sin x - 2\right)dx$.

1037. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{2x^2 + 9}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3}}$;

4) $\int \frac{dx}{4x^2 - 3}$; 5) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$; 6) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Решение. 1) Данный интеграл приведем к табличному следующим образом:

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 9} = \int \frac{dx}{2\left(x^2 + \frac{9}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{9}{2}};$$

здесь $a^2 = \frac{9}{2}$ (см. формулу 12), следовательно,

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{3} + C.$$

Аналогичные преобразования сделаем и с интегралами 2, 3 и 4.

$$2)\ \int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{5}{4}-x^2\right)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}}+C\quad[(11)].$$

$$3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2-\frac{3}{2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{2}}\right|+C\quad[(14)].$$

Ответ можно написать и в другом виде. Преобразуем

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2-3}}{\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2-3}\right|+C_1.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2-3}\right|+C_1.$$

Оба ответа эквивалентны, что можно проверить дифференцированием.

$$4)\int\frac{dx}{4x^2-3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{3}{4}}}{x+\sqrt{\frac{3}{4}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{3}}\right|+C\quad[(13)].$$

5) Данный интеграл не является табличным. Подынтегральную функцию представим в виде алгебраической суммы, а затем применим формулы и правила интегрирования:

$$\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1+\cos x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C\quad[\text{II, I; (2), (8)}].$$

$$6)\ \int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=$$

$$=\operatorname{tg}x-x+C\quad[\text{II; (10), (2)}].$$

Пользуясь основными правилами I, II и формулами интегрирования (1) — (14), найти следующие интегралы и результаты проверить дифференцированием:

1038. $\int 3dx$.

1039. $\int x^8 dx$.

1040. $\int \frac{2dx}{x^3}$.

1041. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

1042. $\int (3x^2 + 5x - 1)\,dx$.

1043. $\int (2x + \sqrt{x})^2 dx$.

1044. $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x}\,dx$.

1045. $\int 4x\,(x^2 - 3)\,dx$.

1046. $\int \frac{(x-1)(x^2+3)}{x^2}\,dx$.

1047. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

1048. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$.

1049. $\int 2^x dx$.

Пользуясь основными правилами I, II и формулами интегрирования (1) — (14), найти следующие интегралы:

1050. $\int (2\sqrt[3]{x} - \sqrt{5x} + 1)\,dx$.

1051. $\int \frac{x^3 + 4x + 5}{x^2 + 4}\,dx$.

1052. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

1053. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}\,dx$.

1054. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$.

1055. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3}\right) dx$.

1056. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$.

1057. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$.

1058. $\int (a + bx)^2 dx$.

1059. $\int 2^x 3^x dx$.

1060. $\int (a - bx)^3\,dx$.

1061. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} - \frac{3}{4 + x^2}\right) dx$.

1062. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} + \frac{5}{x^2 - 9}\right) dx$.

1063. $\int (3 \sin x + \sec^2 x)\,dx$.

1064. $\int \frac{dx}{4x^2 + 1}$.

1065. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 3x^2}}$.

1066. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 9}}$.

1067. $\int \frac{dx}{4x^2 - 5}$.

1068. $\int \frac{dx}{7 - x^2}$.

1069. $\int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^3}\right) dx$.

1070. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

1071. $\int \frac{3 - \sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$.

1072. $\int \frac{x^4}{x^2 + 1}\,dx$.

1073. $\int \frac{x^2 - 4}{x + 4}\,dx$.

1074. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$.

1075. $\int \frac{2x - 1}{x - 2}\,dx$.

§ 3. Метод подстановки (замена переменной)

Если интеграл непосредственно не берется, то во многих случаях метод интегрирования заменой переменной приводит к цели.

1. Пусть требуется найти интеграл $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx$, где подынтегральная функция непрерывна. Применив подстановку $t=\varphi(x)$, получим

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt. \qquad (1)$$

В найденном интеграле перейдем к прежней переменной x, воспользовавшись известным нам равенством $t=\varphi(x)$.

Полезно запомнить частный случай:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C. \qquad (1')$$

Интеграл дроби, числитель которой есть дифференциал знаменателя, равен натуральному логарифму модуля знаменателя.

Действительно, положим $f(x)=t$, тогда $f'(x)\,dx=dt$. Получим

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C.$$

2. Найти интеграл $\int f(x)\,dx$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна. Полагая $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$, где производная $\varphi'(t)$ есть функция непрерывная, получаем

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (2)$$

Для получения искомого результата в найденном интеграле с новой переменной t переходим к переменной x, пользуясь исходной формулой $x=\varphi(t)$.

Приведем примеры.

1) Найти $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Решение. Наличие множителя xdx дает возможность применить подстановку $\sqrt{x^2+1}=t$, откуда $x^2+1=t^2$. Дифференцируя, получаем $2xdx=2tdt$, следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{tdt}{t}=\int dt=t+C=\sqrt{x^2+1}+C.$$

2) Найти $\int\sqrt[3]{5x-2}\,dx$.

Решение. Полагаем $5x-2=t$, тогда $dx=\frac{1}{5}dt$, следовательно,

$$\int\sqrt[3]{5x-2}\,dx=\frac{1}{5}\int\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{3}}\,dt=$$

$$=\frac{1\cdot3}{5\cdot4}\,t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x-2)^4}+C.$$

3) Найти $\int (3x+4)^{40}dx$.

Решение. Полагаем $3x+4=t$, имеем $dx=\frac{1}{3}dt$, следовательно,

$$\int (3x+4)^{40}dx=\frac{1}{3}\int t^{40}dt=\frac{1}{3\cdot 41}t^{41}+C=\frac{1}{123}(3x+4)^{41}+C.$$

4) Найти $\int 3^{\sin x}\cos x dx$.

Решение. Полагая $\sin x=t$, имеем $\cos x dx=dt$, следовательно,

$$\int 3^{\sin x}\cos x dx=\int 3^t dt=\frac{3^t}{\ln 3}+C=\frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C.$$

В этом примере наличие множителя $\cos x dx$ дало возможность применить подстановку $\sin x=t$.

5) Найти $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^5}{1+x^2}dx$.

Решение. Множитель $\frac{dx}{1+x^2}$ позволяет применить подстановку $\operatorname{arctg} x=t$. Имеем $\frac{dx}{1+x^2}=dt$, следовательно,

$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^5}{1+x^2}dx=\int t^5 dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{(\operatorname{arctg} x)^6}{6}+C.$$

6) Найти $\int \sin 5x dx$.

Решение. Положим $5x=t$, тогда $dx=\frac{1}{5}dt$, следовательно,

$$\int \sin 5x dx=\frac{1}{5}\int \sin t dt=-\frac{1}{5}\cos t+C=-\frac{1}{5}\cos 5x+C.$$

Короче:

$$\int \sin 5x dx=\frac{1}{5}\int \sin 5x d(5x)=-\frac{1}{5}\cos 5x+C.$$

7) Найти $\int \sin^3 x\cos x dx$.

Решение. Полагая $\sin x=u$, имеем $\cos x dx=du$, следовательно,

$$\int \sin^3 x\cos x dx=\int u^3 du=\frac{u^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$$

Короче:

$$\int \sin^3 x\cos x dx=\int \sin^3 x d\sin x=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$$

Проверка. Убедимся, что $F'(x)=f(x)$. Находим

$$\left(\frac{\sin^4 x}{4}\right)'=\frac{1}{4}(\sin^4 x)'=\frac{1}{4}\cdot 4\sin^3 x(\sin x)'=\sin^3 x\cos x,$$

следовательно, интегрирование произведено правильно.

8) Найти $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C =$
$= \ln|\ln x| + C$.

Проверка. Убедимся, что $dF(x) = f(x)\,dx$. Находим
$d(\ln|\ln x|) = (\ln|\ln x|)'\,dx = \frac{1}{\ln x}(\ln x)'\,dx = \frac{1}{x \ln x}\,dx$,
следовательно, интегрирование произведено правильно.

9) Найти $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Решение. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d \sin x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \int t^{-\frac{2}{3}} dt =$
$= 3t^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{\sin x} + C$.

10) Найти $\int \frac{dx}{(3x-4)^7}$.

Решение. Применим подстановку $3x - 4 = t$, тогда $dx =$
$= \frac{1}{3} dt$;

$$\int \frac{dx}{(3x-4)^7} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^7} = \frac{1}{3}\int t^{-7} dt = -\frac{t^{-6}}{3 \cdot 6} + C =$$
$$= -\frac{1}{18(3x-4)^6} + C.$$

11) Найти $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Решение. $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$ [(1′)].

Проверка. $(\ln|\sin x|)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$,
следовательно, интегрирование произведено правильно.

12) Найти $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1}$.

Решение. Числитель дроби равен дифференциалу знаменателя, следовательно, по формуле (1′) имеем

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1) + C.$$

Проверка. $d[\ln(x^2+x+1)] = [\ln(x^2+x+1)]'\,dx =$
$= \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx = \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$,
следовательно, интегрирование произведено правильно.

13) Найти $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 1}$.

Решение. $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 1| + C$ [(1′)].

14) Найти $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 5} dx$.

Решение. $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 5} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x + \frac{8}{3}}{x^2 + 5} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx +$

$+ \int \frac{4}{x^2 + 5} dx = \frac{3}{2}\ln(x^2 + 5) + \frac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$ [(1′), (12)].

Замечание. Выражения, содержащие $\sqrt{a^2 - x^2}$ или $\sqrt{x^2 + a^2}$, можно интегрировать с помощью тригонометрических подстановок. Так, если содержится $\sqrt{a^2 - x^2}$, то применяется подстановка $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$, если содержится $\sqrt{x^2 + a^2}$, то подстановка $x = a\operatorname{tg} t$ или $x = a\operatorname{ctg} t$, если же содержится $\sqrt{x^2 - a^2}$, то подстановка $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$.

15) Найти $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx$.

Решение. Применим подстановку $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$;

$$\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt = \int \operatorname{ctg}^2 t dt =$$

$$= \int (\csc^2 t - 1)\, dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = C - \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} - t =$$

$$= C - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} - \arcsin x.$$

Найти следующие интегралы и результаты проверить дифференцированием:

1076. $\int \sin 2x dx$. **1077.** $\int \cos(3x + 4)\, dx$.

1078. $\int (3x - 5)^{30} dx$. **1079.** $\int x e^{x^2} dx$.

1080. $\int x\sqrt{2x^2 + 5}\, dx$. **1081.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Найти интегралы:

1082. $\int x\sqrt{x + 2}\, dx$. Подстановка $\sqrt{x + 2} = t$.

1083. $\int x\sqrt{a + x^2}\, dx$. **1084.** $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

1085. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. **1086.** $\int \frac{x}{\sqrt{x - 1}} dx$.

1087. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 2\cos x}} dx$. Подстановка $\sqrt{1 + 2\cos x} = t$.

1088. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{3+5\sin x}}\,dx$. Подстановка $\sqrt[3]{3+5\sin x}=t$.

1089. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

1090. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1091. 1) $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$; 2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$. Подстановка $x^3=t$.

Применяя формулу (1′), найти интегралы:

1092. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

1093. $\int \frac{dx}{x+3}$.

1094. $\int \frac{dx}{ax+b}$.

1095. $\int \frac{xdx}{x^2-1}$.

1096. $\int \frac{x^2}{1-3x^3}\,dx$.

1097. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} 5x}$.

1098. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-6}\,dx$.

1099. $\int \frac{2\cos x}{3-4\sin x}\,dx$.

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

1100. $\int x\sqrt{x-2}\,dx$.

1101. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^4}}$. Подстановка $x^2=t$.

1102. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+4\cos^2 x}}\,dx$.

1103. $\int (x-1)\sqrt{x+1}\,dx$.

1104. $\int \frac{dx}{3-4x}$.

1105. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1106. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

1107. $\int \sqrt[5]{x^3+2}\,x^2dx$.

1108. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

1109. $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$.

1110. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

1111. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$.

1112. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Подстановка $x=a\operatorname{tg} t$.

1113. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$.

1114. $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx$.

1115. $\int \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx$.

1116. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

1117. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1118. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x}}$.

1119. $\int \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{1-\ln x}}\,dx$.

§ 4. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \qquad (1)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции.

Если подынтегральное выражение содержит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на целую рациональную, то за u принимают логарифмическую функцию или аркфункцию, а все остальное за dv. Такая замена дает возможность получить более простое подынтегральное выражение $v\,du$ по сравнению с выражением $u\,dv$, так как после дифференцирования функции u, равной логарифмической функции или аркфункции, мы находим функцию, которая значительно проще и поэтому может оказаться, что в правой части равенства (1) получим интеграл, берущийся одним из рассмотренных уже методов.

Если же подынтегральное выражение есть произведение целой рациональной функции на тригонометрическую или показательную функцию, то за u следует принять целую рациональную функцию.

Интегрирование по частям применяется и в некоторых других случаях.

Неудачное применение формулы (1) приводит к более сложному интегралу $\int v\,du$, чем исходный $\int u\,dv$. В этом случае надо принять за u и dv другие выражения или применить иной метод интегрирования.

1120. Найти интегралы:

1) $\int (x+2)\ln x\,dx$;
2) $\int x^2 \arcsin x\,dx$;
3) $\int \arccos x\,dx$;
4) $\int e^x \sin x\,dx$;
5) $\int (x^2+2x+1)\sin 3x\,dx$;
6) $\int x^2 e^{3x}\,dx$.

Решение. 1) Воспользуемся формулой (1). Полагая $u=\ln x$, $dv=(x+2)\,dx$, имеем $du=\frac{dx}{x}$; $v=\int (x+2)\,dx=\frac{x^2}{2}+2x=$ $=x\left(\frac{x}{2}+2\right)$, следовательно,

$$\int (x+2)\ln x\,dx = x\left(\frac{x}{2}+2\right)\ln x - \int x\left(\frac{x}{2}+2\right)\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x}{2}(x+4)\ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C.$$

2) Полагая $u=\arcsin x$, $dv=x^2dx$, имеем $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$, следовательно,

$$\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(а)}$$

Теперь найдем интеграл правой части способом подстановки $1-x^2=t^2$. Дифференцируя, получаем $-2xdx=2tdt$ или $xdx=-tdt$, следовательно,

$$\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(1-t^2)(-t)\,dt}{t} = -\frac{1}{3}\left(t-\frac{t^3}{3}\right) =$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3}.$$

Подставляя этот результат в равенство (а), находим

$$\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{1}{3}\left(x^3 \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right) + C.$$

3) Полагая $u=\arccos x$, $dv=dx$, имеем $du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=\int dx = x$, следовательно,

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(б)}$$

Интеграл правой части найдем способом подстановки

$$1-x^2=t^2;\quad xdx=-tdt;$$
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{tdt}{t} = -\int dt = -t = -\sqrt{1-x^2}.$$

Подставляя этот результат в равенство (б), получаем

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

4) Полагая $u=\sin x$, $dv=e^x dx$, имеем $du=\cos x dx$, $v=\int e^x dx = e^x$, следовательно,

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx. \qquad \text{(в)}$$

Интеграл в правой части снова берем по частям. Полагая $u=\cos x$, $dv=e^x dx$, имеем $du=-\sin x dx$, $v=\int e^x dx = e^x$, следовательно,

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x - \int -e^x \sin x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx.$$

Подставляя этот результат в равенство (в), получаем

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx,$$

откуда

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + 2C.$$

Следовательно,

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

5) Полагая $u = x^2 + 2x + 1$, $dv = \sin 3x dx$, имеем $du = 2(x+1)dx$, $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$, следовательно,

$$\int (x^2 + 2x + 1)\sin 3x dx = -\frac{1}{3}(x^2 + 2x + 1)\cos 3x + \frac{2}{3}\int (x+1)\cos 3x dx. \quad (г)$$

Интеграл в правой части снова берем по частям. Полагая $u = x + 1$, $dv = \cos 3x dx$, имеем $du = dx$, $v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x$, следовательно,

$$\int (x+1)\cos 3x dx = \frac{1}{3}(x+1)\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx.$$

Подставляя этот результат в равенство (г), получаем

$$\int (x^2 + 2x + 1)\sin 3x dx = -\frac{1}{3}(x^2 + 2x + 1)\cos 3x + \frac{2}{9}(x+1)\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C.$$

6) Полагая $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$, имеем $du = 2x dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$, следовательно,

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx. \quad (д)$$

Вычисляем интеграл правой части равенства (д): $u = x$, $dv = e^{3x}dx$, $du = dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$, следовательно,

$$\int x e^{3x} dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C_1 = \frac{1}{9}e^{3x}(3x - 1) + C_1.$$

Подставляя этот результат в равенство (д), получаем

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{27}e^{3x}(3x - 1) + C = \frac{1}{27}e^{3x}(9x^2 - 6x + 2) + C.$$

1121. $\int x \sin x dx$.

1122. $\int x e^x dx$.

1123. $\int e^x \cos x dx$.

1124. $\int \ln x dx$.

1125. $\int x^2 \cos x dx$.

1126. $\int x \ln^2 x dx$.

1127. $\int x^2 \ln x dx$.

1128. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

1129. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$.

1130. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

1131. $\int (x^2+3)\,e^{-2x}\,dx$.

1132. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

1133. $\int x\cos 3x\,dx$.

1134. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

1135. $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

1136. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

1137. $\int \sin(\ln x)\,dx$.

1138. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1139. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

1140. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$.

§ 5. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен

Для вычисления интегралов вида

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx;\quad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx;\quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

содержащих квадратный трехчлен, применим следующее преобразование: выделим полный квадрат из квадратного трехчлена, в результате чего получим квадратный двучлен

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] = a\,(t^2 \pm m^2).$$

После этого применяют формулы и уже известные методы интегрирования.

1141. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+5}$;

2) $\int \frac{x+3}{x^2+4x-1}\,dx$;

3) $\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{3+2x-x^2}\,dx$;

4) $\int \frac{2x-1}{x^2-2x}\,dx$.

Решение. 1) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-2x+\frac{5}{3}} =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}(x-1)}{2} + C.$$

2) Полагая $x+2=t$, имеем $x=t-2$, $dx=dt$, тогда

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x-1}\,dx = \int \frac{x+3}{(x+2)^2-5}\,dx = \int \frac{t+1}{t^2-5}\,dt = \int \frac{t}{t^2-5}\,dt +$$

$$+\int\frac{dt}{t^2-5}=\frac{1}{2}\ln|t^2-5|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x-1|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}}\right|+C.$$

3) Подынтегральная дробь неправильная. Путем деления числителя на знаменатель выделим целую часть и представим данную дробь в виде суммы целой рациональной функции и правильной дроби:

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{3+2x-x^2}=-x+\frac{4x}{3+2x-x^2};$$

$$I=\int\left(-x+\frac{4x}{3+2x-x^2}\right)dx=-\int xdx+4\int\frac{xdx}{3+2x-x^2}=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+4I_1.$$

Найдем интеграл

$$I_1=\int\frac{xdx}{4-(x-1)^2}=-\int\frac{t+1}{t^2-4}dt=-\int\frac{tdt}{t^2-4}-\int\frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|t^2-4|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-3|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$$

$(x-1=t,\ x=t+1,\ dx=dt)$ [II; (1) § 3; (13) § 1].

Следовательно,

$$I=C-\frac{x^2}{2}-2\ln|x^2-2x-3|-\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|.$$

4) $I=\int\frac{2x-1}{x^2-2x}dx=\int\frac{2x-1}{(x-1)^2-1}dx.$

Пусть $x-1=t$, тогда $x=t+1$, $dx=dt$;

$$I=\int\frac{2t+1}{t^2-1}dt=\int\frac{2t}{t^2-1}dt+\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln|t^2-1|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln|x^2-2x|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$$ [II; (1) § 3; (13) § 1].

1142. Найти интегралы:

1) $\int\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx;$ 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-3x^2}}.$

Решение. 1) $\int\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx=\int\frac{3x-5}{\sqrt{(x-2)^2+1}}dx=$

$$=\int\frac{3t+1}{\sqrt{t^2+1}}dt=3\int\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=3\sqrt{t^2+1}+$$

$$+\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+C=3\sqrt{x^2-4x+5}+$$
$$+\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right)+C.$$

Применили подстановку $t=x-2$, $dt=dx$.

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-3x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x-x^2\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9}-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3t}{2}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x-1}{2}+C,$$

где $x-\frac{1}{3}=t$, $dx=dt$.

1143. Найти интегралы:

1) $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx$; 2) $\int\sqrt{5+4x-x^2}$.

Решение. Интеграл $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ в зависимости от знака коэффициента a можно свести к интегралу $\int\sqrt{t^2+\alpha}\,dt$ или $\int\sqrt{\beta^2-t^2}\,dt$, каждый из которых вычисляется с помощью тригонометрических подстановок (см. замечание § 3 и пример 15) либо методом интегрирования по частям.

1) $I=\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx=\int\sqrt{(x-1)^2-2}\,dx=\int\sqrt{t^2-2}\,dt$, где $t=x-1$. Последний интеграл вычислим способом интегрирования по частям. Полагая $u=\sqrt{t^2-2}$, $dv=dt$, имеем $du=\frac{t}{\sqrt{t^2-2}}dt$, $v=t$, следовательно,

$$I=t\sqrt{t^2-2}-\int t\frac{t}{\sqrt{t^2-2}}\,dt=t\sqrt{t^2-2}-\int\frac{t^2-2+2}{\sqrt{t^2-2}}\,dt=$$
$$=t\sqrt{t^2-2}-\int\frac{t^2-2}{\sqrt{t^2-2}}\,dt-\int\frac{2}{\sqrt{t^2-2}}\,dt=t\sqrt{t^2-2}-I-$$
$$-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|,$$

откуда $2I=t\sqrt{t^2-2}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|+2C$ или

$$I=\frac{t}{2}\sqrt{t^2-2}-\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right|+C.$$

Учитывая, что $t=x-1$, получаем

$$I=\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C.$$

2) $I=\int\sqrt{5+4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{9-(x-2)^2}\,dx=\int\sqrt{9-t^2}\,dt.$

Применим тригонометрическую подстановку:

$$t = 3\sin z,\quad dt = 3\cos z dz;$$

$$I = \int \sqrt{9 - 9\sin^2 z}\, 3\cos z dz = 9\int \cos^2 z dz =$$

$$= 9\int \frac{1+\cos 2z}{2} dz = \frac{9}{2}\left(z + \frac{\sin 2z}{2}\right) + C. \qquad \text{(a)}$$

Перейдем к переменной t, а затем и к переменной x:

$$\sin z = \frac{t}{3},\quad z = \arcsin\frac{t}{3};$$

$$\sin 2z = 2\sin z\cdot\cos z = 2\sin z\sqrt{1-\sin^2 z} =$$

$$= 2\cdot\frac{t}{3}\sqrt{1-\frac{t^2}{9}} = \frac{2}{9}t\sqrt{9-t^2}.$$

Подставляя найденные значения z и $\sin 2z$ в равенство (а), имеем

$$I = \frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{t}{3} + \frac{t}{9}\sqrt{9-t^2}\right) + C.$$

Учитывая, что $t = x - 2$, получаем

$$I = \frac{1}{2}\left[9\arcsin\frac{x-2}{3} + (x-2)\sqrt{5+4x-x^2}\right] + C.$$

Найти интегралы:

1144. $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$.

1145. $\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}$.

1146. $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+5}dx$.

1147. $\int \frac{xdx}{9+8x-x^2}$.

1148. $\int \frac{2x-1}{x^2+3x}dx$.

1149. $\int \frac{x^2+4x-2}{x^2+3x-4}dx$.

1150. $\int \frac{1+x}{x-x^2}dx$.

1151. $\int \frac{2x^3+x-1}{x^2+2x-3}dx$.

1152. $\int \frac{4dx}{3x^2+8x-2}$.

1153. $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7}dx$.

1154. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

1155. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-1}}$.

1156. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+3)}}$.

1157. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

1158. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x}}dx$.

1159. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

1160. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$.

1161. $\int \sqrt{x^2-4x+1}\,dx$.

1162. $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$.

1163. $\int \sqrt{x^2+6x}\,dx$.

1164. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

1165. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$.

§ 6. Примеры интегралов, не выражающихся элементарными функциями

Известно, что при дифференцировании элементарных функций мы снова получаем элементарные функции. Естественно, возникает вопрос, всегда ли будет неопределенный интеграл от элементарной функции также элементарной функцией. Оказывается, что не всегда. Известны интегралы, как, например,

$$\int \sqrt{x^5+1}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+2}},\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int e^{x^2}\,dx,\quad \int \frac{e^x}{x^n}\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{1}$$

которые не являются элементарными функциями, т. е. эти интегралы не могут быть выражены никакой конечной комбинацией элементарных функций. Общих признаков, на основании которых можно было бы определить, берется ли данный интеграл в конечном виде, т. е. выражается ли первообразная функция для данной функции через элементарные функции при помощи конечного числа операций (без предельного перехода), не существует. Упомянутые интегралы (1) называют *неберущимися*.

§ 7. Интегрирование рациональных функций

1. Если подынтегральная рациональная дробь $\frac{E(x)}{Q(x)}$ неправильная (степень числителя больше или равна степени знаменателя), то при помощи деления, по правилу деления многочленов, надо представить ее в виде суммы целой рациональной функции $R(x)$ и правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, т. е.

$$\frac{E(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

и

$$\int \frac{E(x)}{Q(x)}dx = \int R(x)\,dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Целая рациональная функция интегрируется непосредственно:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)\,dx = a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + \ldots + a_nx + C.$$

Следовательно, задача интегрирования неправильной дроби сводится к задаче интегрирования правильной дроби.

2. Если знаменатель правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разлагается на множители вида $(x-a)^\alpha\,(x-b)^\beta \ldots (x^2+px+q)^\gamma$,

где корни трехчлена комплексные, то правильная дробь разлагается на сумму простых дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\gamma x+N_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma}. \quad (1)$$

Для фактического вычисления коэффициентов в разложении (1) обычно применяют метод неопределенных коэффициентов (способ сравнения коэффициентов). Этот способ состоит в следующем. Пусть дана правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Знаменатель этой дроби разлагаем на простые действительные множители, и по виду этого разложения пишем для данной дроби разложение с неопределенными коэффициентами (1). В правой части этого разложения приводим простые дроби к общему знаменателю, которым будет $Q(x)$, складываем их и получаем правильную дробь*, после чего знаменатель $Q(x)$ в левой и правой частях отбрасываем. Получим тождество (2), в левой части которого полином $P(x)$, а в правой — полином $(n-1)$-й степени с неопределенными (буквенными) коэффициентами:

$$P(x) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}. \quad (2)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (2), получаем систему из n уравнений с n неизвестными. Решив ее, найдем искомые коэффициенты.

1166. Найти интегралы:

1) $\int (5x^3 - 4x^2 + 2)\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{x-2}$;

3) $\int \frac{5dx}{(x+3)^7}$; 4) $\int \frac{2x-5}{x^2+4x+8}\,dx$.

Решение. 1) Целая рациональная функция интегрируется непосредственно:

$$\int (5x^3 - 4x^2 + 2)\,dx = 5\int x^3dx - 4\int x^2dx + 2\int dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x + C.$$

2) Интеграл от простой дроби

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2| + C \quad [(1)\ \S\ 3].$$

* Сумма правильных рациональных дробей есть также правильная дробь.

3) Интеграл также от простой дроби

$$\int \frac{5dx}{(x+3)^7} = 5\int (x+3)^{-7}\,d(x+3) = 5\frac{(x+3)^{-6}}{-6} + C =$$
$$= -\frac{5}{6(x+3)^6} + C.$$

4) Подынтегральная дробь простая, так как она правильная и знаменатель ее квадратный трехчлен, корни которого комплексные.

Применим известное уже нам преобразование квадратного трехчлена в квадратный двучлен:

$$I = \int \frac{2x-5}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{2x-5}{(x+2)^2+4}dx = \int \frac{2t-9}{t^2+4}dt,$$

где $x+2=t$, $x=t-2$, $dx=dt$;

$$I = \int \frac{2t}{t^2+4}dt - 9\int \frac{dt}{t^2+4} = \ln(t^2+4) - \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \ln(x^2+4x+8) - \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

1167. Найти интегралы:

1) $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}\,dx$; 2) $\int \frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}\,dx$;

3) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. 4) $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}\,dx$.

Решение. 1) Данный интеграл с помощью преобразования квадратного трехчлена в квадратный двучлен можно привести к табличному интегралу, после чего найти его.

Найдем интеграл способом разложения правильной дроби на простые дроби. Знаменатель подынтегральной правильной дроби имеет корни $x_1=2$, $x_2=-3$.

Следовательно, $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$.

Напишем разложение

$$\frac{x-1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}. \qquad (a)$$

Дроби приводим к общему знаменателю и, освободившись от него, находим

$$x-1 = A(x+3) + B(x-2) = (A+B)x + 3A - 2B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l} x & A+B=1, \\ x^0 & 3A-2B=-1, \end{array}$$

откуда

$$A=\frac{1}{5}, \quad B=\frac{4}{5}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (а), находим искомое разложение:

$$\frac{x-1}{x^2+x-6}=\frac{\frac{1}{5}}{x-2}+\frac{\frac{4}{5}}{x+3}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x-1}{x^2+x-6}\,dx=\int\frac{\frac{1}{5}}{x-2}\,dx+\int\frac{\frac{4}{5}}{x+3}\,dx=\frac{1}{5}\ln|x-2|+$$
$$+\frac{4}{5}\ln|x+3|+\ln C=\ln|C\sqrt[5]{(x-2)(x+3)^4}|.$$

2) Разложим знаменатель дроби на простые действительные множители:

$$x^3-3x^2+4=(x^3-2x^2)-(x^2-4)=(x-2)(x^2-x-2).$$

Корни трехчлена x^2-x-2 есть -1 и 2, поэтому окончательно имеем

$$x^3-3x^2+4=(x-2)^2(x+1).$$

Напишем разложение

$$\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}. \qquad (б)$$

Корень $x=2$ имеет кратность, равную двум, поэтому ему в разложении (б) и соответствуют два слагаемых. Теперь приведем это разложение к общему знаменателю, а затем, освободившись от него, получим

$$2x-5=A(x+1)+B(x-2)(x+1)+C(x-2)^2=$$
$$=(B+C)x^2+(A-B-4C)x+A-2B+4C. \qquad (в)$$

Из этого тождества определяем коэффициенты A, B, C. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{array}{c|l} x^2 & B+C=0, \\ x & A-B-4C=2, \\ x^0 & A-2B+4C=-5 \end{array}$$

(слева в равенстве (в) коэффициент при x^2 равен 0), откуда $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{7}{9}$, $C=-\frac{7}{9}$. Окончательно имеем

$$\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}=-\frac{1}{3(x-2)^2}+\frac{7}{9(x-2)}-\frac{7}{9(x+1)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)}\,dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x-2}-$$
$$-\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{3(x-2)}+\frac{7}{9}\ln|x-2|-\frac{7}{9}\ln|x+1|+C=$$
$$=\frac{1}{3(x-2)}+\frac{7}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

3) Подынтегральная дробь неправильная. Надо сначала исключить целую часть; для этого путем деления многочлена на многочлен данную дробь представим в виде суммы целой рациональной функции и правильной дроби:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Корни знаменателя дроби действительные. Напишем разложение

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}. \quad (г)$$

Дроби приводим к общему знаменателю и, освободившись от него, получаем

$$4x^2+16x-8=A(x^2-4)+B(x+2)x+C(x-2)x=$$
$$=(A+B+C)x^2+2(B-C)x-4A.$$

Теперь напишем систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B+C=4, \\ x & 2(B-C)=16, \\ x^0 & -4A=-8, \end{array}$$

откуда $A=2$, $B=5$, $C=-3$. Окончательно имеем

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}+\frac{-3}{x+2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int(x^2+x+4)dx+\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{5}{x-2}dx+$$
$$+\int\frac{-3dx}{x+2}=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-$$
$$-3\ln|x+2|+C=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$$

4) Подынтегральная дробь неправильная. Исключим целую часть

$$\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=1+\frac{x^2+3}{x^3-8}.$$

Разложим знаменатель дроби на простые действительные множители:

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

и напишем разложение

$$\frac{x^2+3}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}, \quad (д)$$

откуда

$$x^2+3=A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)=(A+B)x^2+$$
$$+(2A-2B+C)x+4A-2C.$$

Напишем систему уравнений:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=1, \\ x & 2A-2B+C=0, \\ x^0 & 4A-2C=3, \end{array}$$

откуда $A=\frac{7}{12}$, $B=\frac{5}{12}$, $C=-\frac{1}{3}$. Окончательно имеем

$$\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=1+\frac{7}{12(x-2)}+\frac{5x-4}{12(x^2+2x+4)}.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx=\int dx+\frac{7}{12}\int\frac{dx}{x-2}+$$

$$+\frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{1}{12}I_1; \quad \text{(e)}$$

$$I_1=\int\frac{5x-4}{(x+1)^2+3}dx=\int\frac{5t-9}{t^2+3},$$

где $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$;

$$I_1=\int\frac{5t}{t^2+3}dt-\int\frac{9}{t^2+3}dt=\frac{5}{2}\ln(t^2+3)-\frac{9}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+$$

$$+C_1=\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+4)-3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C_1.$$

Подставляя значение I_1 в равенство (e), найдем

$$I=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Найти интегралы:

1168. $\int(3x^4-x^2+5x-1)dx$.

1169. $\int\frac{2dx}{x-5}$.

1170. $\int\frac{dx}{3-x}$.

1171. $\int\frac{dx}{(x+2)^5}$.

1172. $\int\frac{xdx}{x^2-4x+9}$.

1173. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

1174. $\int\frac{dx}{x^3-x}$.

1175. $\int\frac{dx}{x^3+x^2}$.

1176. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

1177. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)}dx$.

1178. $\int\frac{(x+1)^3}{x^3-1}dx$.

1179. $\int\frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$.

1180. $\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$.

1181. $\int\frac{-7x^3+6x^2+6x-12}{3x^3(x-2)}dx$.

1182. $\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)(x-1)}dx$.

1183. $\int\frac{t^5+1}{16-t^4}dt$.

§ 8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}},\ \ldots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{s}{t}}\right]dx, \qquad (1)$$

где R — рациональная функция; p, q, ..., s, t — целые числа, находятся с помощью подстановки

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad (а)$$

где m — наименьшее общее кратное чисел q, ..., t.

Рассмотрим два частных случая:

1) если в интеграле (1) $c=0$, то он будет иметь вид

$$\int R\left[x,\ (\alpha x+\beta)^{\frac{p}{q}},\ \ldots,\ (\alpha x+\beta)^{\frac{s}{t}}\right]dx, \qquad (2)$$

где $\alpha=\frac{a}{d}$, $\beta=\frac{b}{a}$;

2) если $b=c=0$, $a=d=1$, то интеграл (1) примет вид

$$\int R\left(x,\ x^{\frac{p}{q}},\ \ldots,\ x^{\frac{s}{t}}\right)dx. \qquad (3)$$

Интегралы вида (2) или (3) находятся с помощью подстановки

$$t=\sqrt[m]{\alpha x+\beta} \qquad (б)$$

или

$$t=\sqrt[m]{x}. \qquad (в)$$

1184. Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int\frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; 3) $\int\frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx$.

Решение. 1) Применим подстановку (в):

$$\sqrt[4]{x}=t, \text{ откуда } x=t^4,\ dx=4t^3dt.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4t^3dt}{t^2+t}=4\int\frac{t^2dt}{t+1}=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=4\times$$

$$\times\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right]+C=4\left[\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt[4]{x}+\ln(1+\sqrt[4]{x})\right]+C.$$

2) Применим подстановку (б). Наименьшее кратное показателей корней подынтегрального выражения $m=6$, следовательно,

$t=\sqrt[6]{1+x}$, откуда $1+x=t^6$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$ и

$$\int\frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\int\frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt=6\int(t^9+t^6-t^3)\,dt=$$

$$= 6\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C = 6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1+x}{10} + \frac{\sqrt{1+x}}{7} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\right) + C.$$

3) Применяем подстановку (а):

$$t = \sqrt{\frac{x}{x-1}}, \text{ откуда } x = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt;$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx = -\int \frac{t(t^2-1)^2 2t}{t^4(t^2-1)^2}dt =$$
$$= -\int \frac{2}{t^2}dt = -2\int t^{-2}dt = -2\frac{t^{-1}}{-1} + C =$$
$$= \frac{2}{t} + C = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + C.$$

Проверка. $F(x) = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $F'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \times$

$\times \frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}$, следовательно, интегрирование произведено правильно.

Найти интегралы:

1185. $\int \sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt{x})^2 dx$.

1186. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

1187. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$.

1188. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$.

1189. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$.

1190. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

§ 9. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида

$\int \sin ax \cos bx dx$; $\int \cos ax \cos bx dx$; $\int \sin ax \sin bx dx$,

где $a \neq b$, находятся с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x];$$
$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x];$$
$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

2. Некоторые интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции, с помощью преобразований приводятся к интегралам вида

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx;$$
$$\int f(\cos x)\sin x\,dx;$$
$$\int f(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x} \text{ или } \int f(\operatorname{tg} x)\,dx;$$
$$\int f(\operatorname{ctg} x)\frac{dx}{\sin^2 x} \text{ или } \int f(\operatorname{ctg} x)\,dx,$$

которые находятся соответственно с помощью подстановок:

$$\sin x = t,\ \cos x\,dx = dt; \tag{1}$$
$$\cos x = t,\ \sin x\,dx = -dt; \tag{2}$$
$$\operatorname{tg} x = t,\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \text{ или } \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t,$$
$$dx = \frac{dt}{1+t^2}\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right); \tag{3}$$
$$\operatorname{ctg} x = t,\ \frac{dx}{\sin^2 x} = -dt \text{ или } \operatorname{ctg} x = t,\ x = \operatorname{arcctg} t,$$
$$dx = -\frac{dt}{1+t^2}\ (0 < x < \pi). \tag{4}$$

3. Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

где m и n — положительные четные числа, вычисляются с помощью формул:

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{2}.$$

4. Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция, можно найти с помощью универсальной подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\ (-\pi < x < \pi), \tag{5}$$

откуда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} =$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Следовательно, интегралы такого вида приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t. Заметим, что универсальная подстановка обычно приводит к сложным выкладкам, поэтому она используется в тех случаях, когда другие подстановки применить нельзя.

1191. Найти интегралы:

1) $\int \sin 3x \cos 7x\,dx$; 2) $\int \cos 6x \cos x\,dx$; 3) $\int \sin 2x \sin \frac{2x}{3}\,dx$.

Решение. Воспользуемся формулами п. 1:

$$1)\ \int \sin 3x \cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin(-4x) + \sin 10x]\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int (\sin 10x - \sin 4x)\,dx = \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 10x}{20} + C.$$
$$2)\ \int \cos 6x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos 7x)\,dx =$$
$$= \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin 7x}{14} + C.$$
$$3)\ \int \sin 2x \sin \frac{2x}{3}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos \frac{4x}{3} - \cos \frac{8x}{3}\right) dx =$$
$$= \frac{3\sin \frac{4x}{3}}{8} - \frac{3\sin \frac{8x}{3}}{16} + C = \frac{3}{16}\left(2\sin \frac{4x}{3} - \sin \frac{8x}{3}\right) + C.$$

1192. Найти интегралы:

1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \sin^2 x}}\,dx$; 2) $\int \sin^5 x\,dx$;

3) $\int \frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x + 5} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

Решение. 1) Воспользуемся подстановкой (1):

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \sin^2 x}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{3 + t^2}} = \ln\left(t + \sqrt{3 + t^2}\right) + C =$$
$$= \ln\left(\sin x + \sqrt{3 + \sin^2 x}\right) + C.$$

2) Применим подстановку (2):

$$\int \sin^5 x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x\,dx = -\int (1 - t^2)^2\,dt = -\int (1 - 2t^2 +$$
$$+ t^4)\,dt = \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} - t + C = \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x - \cos x + C.$$

3) Применим подстановку (3):

$$\int \frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x + 5} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{3t^2 + 5} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{5}{3}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$$

4) Воспользуемся подстановкой (4):

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = -\int t^6 \frac{dt}{t^2 + 1} = -\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt =$$
$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} - t - \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x -$$
$$- \operatorname{ctg} x - x + C \quad (0 < x < \pi).$$

1193. Найти интегралы:

1) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; 2) $\cos^4 x dx$; 3) $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$.

Решение. 1) Применяя формулы п. 3, получаем

$$I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int t^2 dt,$$

где $t = \sin 2x$; $dt = 2\cos 2x dx$.

Окончательно находим

$$I = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

$$2) \int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x +$$

$$+ \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

3) Для вычисления данного интеграла воспользуемся универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, откуда $dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} dx$;

$$\int \frac{dx}{2+3\cos x} = \int \frac{dx}{2+3\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2} dx}{2\sec^2\frac{x}{2} + 3 - 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2} dx}{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right) + 3 - 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2} dx}{5 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = -\int \frac{2dt}{t^2-5} =$$

$$= -\frac{2}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right| + C.$$

Найти интегралы:

1194. $\int \cos 5x \cos x dx$.

1195. $\int \sin 6x \cos 2x dx$.

1196. $\int \sin 3x \sin x dx$.

1197. $\int \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3} dx$.

1198. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx$.

1199. $\int \cos x \cos 3x \sin 5x dx$.

1200. $\int \sin^3 x\,dx.$

1201. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}.$

1202. $\int \cos^5 x\,dx.$

1203. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$

1204. $\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx.$

1205. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx.$

1206. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$

1207. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4 - \cos^2 x}}\,dx.$

1208. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}\,dx.$

1209. $\int \sin^2 \frac{x}{7}\,dx.$

1210. $\int \cos^2 3x\,dx.$

1211. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx.$

1212. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx.$

1213. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

1214. $\int \sin^4 x\,dx.$

1215. $\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$

1216. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x}\,dx.$

1217. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

§ 10. Смешанные примеры на интегрирование

1218. $\int (5x - 2)^9\,dx.$

1219. $\int \frac{x\,dx}{2x^2 - 6x + 5}.$

1220. $\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - x^2}\,dx.$

1221. $\int \frac{3x + 1}{(x^2 - 1)(x + 2)}\,dx.$

1222. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 3)}.$

1223. $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{1 - x - x^2}}\,dx.$

1224. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx.$

1225. $\int 5^x e^x dx.$

1226. $\int \frac{6x\,dx}{\sqrt[5]{8 - x^2}}.$

1227. $\int (x^2 + x - 1)\,e^{-x}\,dx.$

1228. $\int \frac{\ln(x - 1)}{x^2}\,dx.$

1229. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 4}\,dx.$

1230. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}\,dx.$

1231. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} + x}.$

1232. $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x}\,dx.$

1233. $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}.$

1234. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}\,dx.$

1235. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx.$

1236. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx.$

1237. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3\,dx.$

1238. $\int \frac{dx}{2 + \sin x}.$

1239. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$. Подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

1240. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\, dx$.

1241. $\int \frac{dx}{3 + \operatorname{tg} x}$.

Глава IX Определенный интеграл

§ 1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Простейшие свойства определенного интеграла и его связь с неопределенным интегралом (теорема Ньютона—Лейбница)

1. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Этот отрезок разделим на n произвольных частей (рис. 75). Обозначим абсциссы точек деления через

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

В каждом частичном промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_i. Умножив значение функции в точке ξ_i на длину соответствующего частичного промежутка, получим

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}).$$

Составим сумму

$$\sigma = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_i)\,\Delta x_i + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

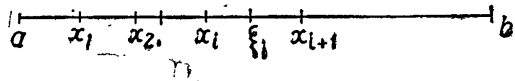


Рис. 75

которую называют *интегральной суммой функции* $f(x)$ отрезка $[a, b]$, и перейдем к пределу

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (1)$$

где λ — наибольшая из разностей $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Если существует конечный предел (1), не зависящий ни от способа дробления, ни от выбора точек ξ_i в соответствующих частичных промежутках Δx_i, то он называется *определенным*

интегралом функции $f(x)$ в промежутке от a до b и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$, где число b называют *верхним пределом*, а число a — *нижним пределом* интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением* и x — *переменной интегрирования*.

Обозначение определенного интеграла весьма удачно. Легко видеть, что в интеграле остаются следы интегральной суммы, т. е. по виду интеграла всегда можно написать соответствующую интегральную сумму данной функции и, наоборот, по виду интегральной суммы можно написать интеграл.

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то предел (1) заведомо существует, т. е. непрерывная функция интегрируема.

2. Простейшие свойства определенного интеграла.

I. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz.$

II. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

III. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

IV. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

V. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

VI. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx.$

3. Рассмотрим формулу Ньютона—Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (2)$$

где $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

1242. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx$; 2) $\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$;

* Здесь термин предел не имеет отношения к понятию предела функции.

3) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha d\alpha$.

Решение. Применяя формулу Ньютона—Лейбница (2) и свойства определенного интеграла, получаем:

1) $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx = \sqrt{2}\int\limits_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx + \int\limits_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx =$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} = 45\frac{1}{3}.$$

2) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+t}\,dt = \int\limits_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}}\,d(1+t) = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$

3) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{3}\Big|_1^3 =$

$$= \arcsin\frac{1}{3} - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 0{,}6794.$$

4) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right) =$

$$= -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1.$$

Вычислить интегралы:

1243. $\int\limits_0^3 2^x dx$. **1244.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

1245. $\int\limits_{-2}^3 (2x^3+x^2-5)\,dx$. **1246.** $\int\limits_{-2}^2 (x^3+4x)\,dx$.

1247. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$. **1248.** $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{x^2+1}$.

1249. $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$. **1250.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1251. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$. **1252.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x dx$.

1253. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx$.

1254. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$.

1255. $\int_0^1 e^{2x}\,dx$.

1256. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

1257. $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

§ 2. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$ и функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $x' = \varphi'(t)$ в промежутке $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и при изменении t в промежутке $[\alpha, \beta]$, значения $x = \varphi(t)$ не выходят за пределы промежутка непрерывности функции $f(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$.

1258. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$;

2) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$;

3) $\int_{-a}^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$;

4) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

Решение. 1) Данный интеграл легко приводится к интегралу вида

$$\int f(\cos x) \sin x\,dx,$$

поэтому применим подстановку $\cos x = t$, $\sin x\,dx = -dt$.

Определим новый промежуток интегрирования. Если $x = 0$, то $\cos 0 = t$ и $t = 1$; если $x = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{\pi}{2} = t$ и $t = 0$, следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x\,dx = -\int_1^0 (1 - t^2)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (1 - t^2)\,dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2) Применим подстановку $t=\sqrt{e^x-1}$, $t^2=e^x-1$, $2tdt=e^xdx$, $dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$.

Если $x=0$, то $t=0$; если $x=\ln 2$, то $t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=1$, следовательно,

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int_0^1 t\,\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=2(t-\operatorname{arctg} t)\Big|_0^1=2(1-\operatorname{arctg}1)=2-\frac{\pi}{2}.$$

3) Применим подстановку $x=a\sin t$, $dx=a\cos t dt$.

Если $x=-a$, то $-a=a\sin t$, $\sin t=-1$ и $t=-\frac{\pi}{2}$, если $x=a$, то $a=a\sin t$, $\sin t=1$ и $t=\frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt=$$

$$=a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt=\frac{a^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{8}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{8}\pi a^4.$$

4) Применим подстановку $\sqrt{x^2-1}=t$, $x^2-1=t^2$, $2xdx=2tdt$ или $xdx=tdt$.

Если $x=1$, то $t=0$, если $x=2$, то $t=\sqrt{3}$, следовательно,

$$\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\int_1^2\frac{x\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{t^2+1}=$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=(t-\operatorname{arctg} t)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы:

1259. $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

1260. $\int_1^5\sqrt{x-1}\,dx$.

1261. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$.

1262. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+5}$.

1263. $\int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{x+5}}\,dx$.

1264. $\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4}\,dx$.

1265. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. Подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

1266. $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$. Подстановка $\sqrt[3]{1+\ln x} = t$.

1267. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1268. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+9}}$.

§ 3. Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ в промежутке $[a, b]$, то имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{1}$$

1269. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$; 2) $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$; 3) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

Решение. 1) Воспользуемся формулой (1). Полагая $u = x$, $dv = e^{-x}dx$ имеем $du = dx$, $v = -e^{-x}$, следовательно,

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2) Полагая $u = \log_2 x$, $dv = xdx$, имеем $du = \frac{dx}{x\ln 2}$, $v = \frac{x^2}{2}$, следовательно,

$$\int_1^2 x\log_2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log_2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{xdx}{2\ln 2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2\log_2 x - \frac{x^2}{4\ln 2}\right)\Big|_1^2 = \left(2 - \frac{1}{\ln 2}\right) - \left(-\frac{1}{4\ln 2}\right) = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$$

3) Полагая $u = \ln^2 x$, $dv = dx$, имеем $du = \frac{2}{x}\ln x\,dx$, $v = x$, следовательно,

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx.$$

Интеграл $\int_1^e \ln x\,dx$ снова находим по частям. Пусть $u = \ln x$, $dv = dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ и

$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e.$$

Окончательно получим

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx = (x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x)\Big|_1^e = e - 2.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

1270. $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$.

1271. $\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

1272. $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$.

1273. $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 2x}\,dx$.

Вычислить интегралы:

1274. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$.

1275. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

1276. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$.

1277. $\int_1^9 \sqrt{x}\ln x\,dx$.

1278. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$.

1279. $\int_2^5 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$.

1280. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$.

1281. $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\,dx$. Подстановка $x = a\sec t$.

1282. $\int_1^{4,5} \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{2x-1}}$. Подстановка $\sqrt[3]{2x-1} = t$.

1283. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$. Подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

§ 4. Площадь плоской фигуры

Известно, что к понятию определенного интеграла привели задачи практического характера. Рассмотрим одну из них.

Вычислим площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$), ординатами $x=a$, $x=b$ и отрезком оси абсцисс (рис. 76); подобную фигуру будем называть *криволинейной трапецией*.

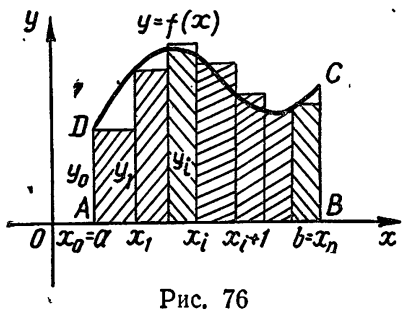


Рис. 76

Основание трапеции AB разделим на n произвольных частей. Обозначим абсциссы точек деления через $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$. Составим сумму

$$\sigma=f(x_0)\,\Delta x_0+f(x_1)\,\Delta x_1+\ldots+f(x_i)\,\Delta x_i+\ldots+f(x_{n-1})\,\Delta x_{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Полученная сумма есть значение площади ступенчатой фигуры, приближенно равной площади криволинейной трапеции $ABCD$, т. е. $S\approx\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\,\Delta x_i$. Предел этой суммы

$$S=\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx \text{ или } S=\int_a^b y\,dx \qquad (1)$$

определяет площадь упомянутой криволинейной трапеции и вместе с этим формула (1) дает возможность вычислить эту площадь.

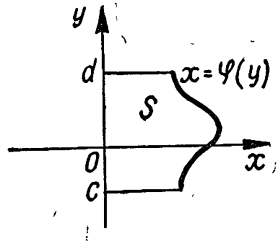


Рис. 77

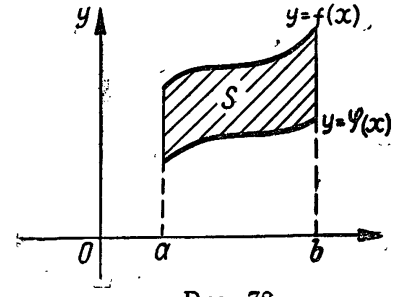


Рис. 78

Площадь криволинейной трапеции с основанием, лежащим на оси Oy (рис. 77) выражается интегралом

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy \quad \text{или} \quad S=\int_c^d x\,dy. \qquad (2)$$

Площадь криволинейной фигуры (рис 78), ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ ($f(x) \geqslant \varphi(x)$) и прямыми $x = a$, $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx. \qquad (3)$$

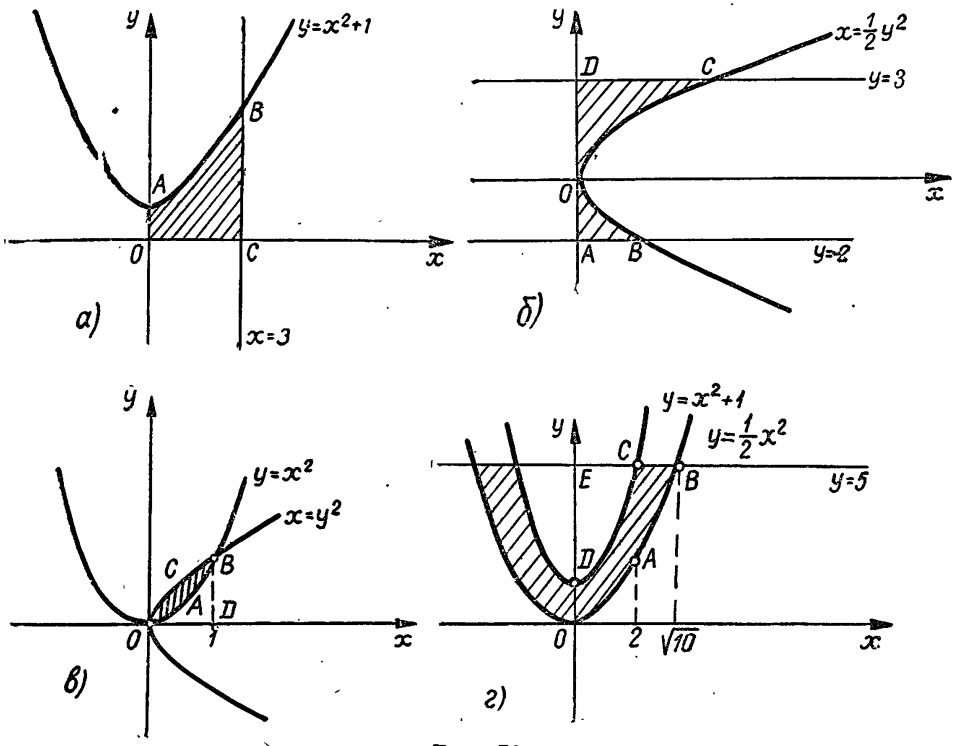


Рис. 79

1284. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

1) осями координат, прямой $x = 3$ и параболой $y = x^2 + 1$;

2) осью ординат, прямыми $y = -2$, $y = 3$ и параболой $x = \frac{1}{2} y^2$;

3) параболами $y = x^2$ и $x = y^2$;

4) параболами $y = x^2 + 1$, $y = \frac{1}{2} x^2$ и прямой $y = 5$.

Решение. 1) Искомую площадь криволинейной трапеции $OCBA$ (рис. 79, *а*) найдем по формуле (1):

$$S = \int_0^3 (x^2 + 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^3 = 9 + 3 = 12.$$

2) Площадь криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 79, *б*) найдем по формуле (2):

$$S = \frac{1}{2}\int_{-2}^{3} y^2 dy = \frac{y^3}{6}\Big|_{-2}^{3} = \frac{27}{6} - \left(-\frac{8}{6}\right) = \frac{35}{6}.$$

3) Найдем точки пересечения данных кривых (рис. 79, *в*). Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x, \end{cases} \quad x^4 - x = 0, \quad \begin{matrix} x_1 = 0, & y_1 = 0, \\ x_2 = 1, & y_2 = 1. \end{matrix}$$

Следовательно, параболы пересекаются в точках $O(0; 0)$ и $B(1; 1)$. Теперь легко определить площадь фигуры $OABCO$, рассматривая ее как разность площадей двух криволинейных трапеций $ODBCO$ и $ODBAO$. Воспользовавшись формулой (3), получим

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

4) Фигура расположена симметрично относительно оси Oy (рис. 79, *г*), поэтому можно вычислить половину площади, а затем полученный результат удвоить. Площадь фигуры $OABCD$ равна разности площадей криволинейных трапеций $OABE$ и DCE. Воспользуемся формулой (2). Из уравнений кривых найдем $x = \sqrt{2y}$ и $x = \sqrt{y-1}$. Промежутки интегрирования определяются легко (см. рис. 79, *г*).

Итак, половина искомой площади

$$\frac{1}{2}S = \int_0^5 \sqrt{2y}\, dy - \int_1^5 \sqrt{y-1}\, dy = \frac{2\sqrt{2}\, y^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^5 -$$

$$- \frac{2(y-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^5 = \frac{2}{3}(5\sqrt{10} - 8),$$

откуда

$$S = \frac{4}{3}(5\sqrt{10} - 8) \approx 10{,}41.$$

Вычислим площадь другим способом. Будем интегрировать по переменной x. Сначала найдем половину площади, для этого вычислим площади $OACD$ и ABC. Сумма этих площадей и составит половину искомой площади. Решив системы уравнений

$$\begin{cases} y = 5, \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 5, \\ y = \frac{1}{2}x^2, \end{cases}$$

найдем координаты точек $C(2; 5)$ и $B(\sqrt{10}; 5)$. Следовательно, промежутки интегрирования теперь известны.

Применив формулу (3), получим

$$\frac{1}{2}S = \int_0^2 \left(x^2 + 1 - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \int_2^{\sqrt{10}} \left(5 - \frac{1}{2}x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} + x\right)\Big|_0^2 + \left(5x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_2^{\sqrt{10}} =$$

$$= \frac{4}{3} + 2 + 5\sqrt{10} - \frac{5\sqrt{10}}{3} - \left(10 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}(5\sqrt{10} - 8)$$

и

$$S = \frac{4}{3}(5\sqrt{10} - 8) \approx 10{,}41.$$

Нетрудно видеть, что интегрирование по переменной y быстрее приводит к искомому результату.

1285. Найти площади двух фигур, ограниченных параболой $y^2 = 2x$ и окружностью $y^2 = 4x - x^2$.

Решение. Преобразуя уравнение окружности, получаем

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4,$$

откуда следует, что центр окружности лежит в точке $C(2; 0)$ и ее радиус $R = 2$ (рис. 80).

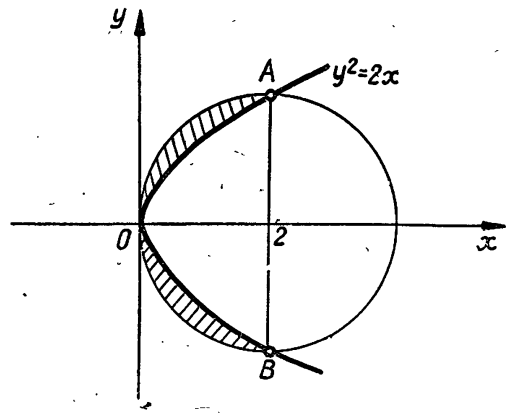


Рис. 80

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4x - x^2, \\ y^2 = 2x, \end{cases}$$

получим следующие точки пересечения данных кривых: $O(0; 0)$, $A(2; 2)$, $B(2; -2)$.

Из рис. 80 видно, что площадь заштрихованной фигуры

$$S = 2\int_0^2 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x})dx = 2\left(\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx - \sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}dx\right).$$

Первый интеграл в правой части равенства равен $\frac{1}{4}$ площади круга, т. е. равен π, поэтому

$$S = 2\left(\pi - \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2\right) = 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right).$$

Площадь незаштрихованной фигуры

$$S_1 = \pi R^2 - S = 4\pi - 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\pi + \frac{8}{3}\right).$$

1286. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$y^2 = x(x-1)^2.$$

Решение. Функция $y^2 = x(x-1)^2$ четная относительно переменной y, следовательно, фигура, ограниченная этой линией, расположена симметрично относительно оси Ox (рис. 81). Найдем промежуток интегрирования. Пусть $y = 0$, тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Воспользовавшись формулой (1), получим

$$\frac{1}{2}S = \int_0^1 \sqrt{x}(x-1)\,dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}})\,dx = -\frac{4}{15}.$$

Знак минус означает, что фигура, площадь которой найдена, расположена ниже оси Ox. Это можно было и предвидеть, так как подынтегральная функция $\sqrt{x}(x-1) \leqslant 0$ на сегменте $[0, 1]$. Следовательно, полученный результат надо взять с противоположным знаком, т. е. положить $\frac{1}{2}S = \frac{4}{15}$, отсюда искомая площадь $S = \frac{8}{15}$.

1287. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 6x - 5$ и осями координат.

Решение. Если фигура расположена по разные стороны от оси Ox (рис. 82, *а*), то площадь S следует вычислять по формуле

$$S = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^b f(x)dx\right|. \quad (4)$$

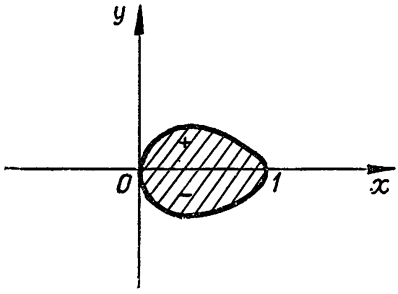


Рис. 81

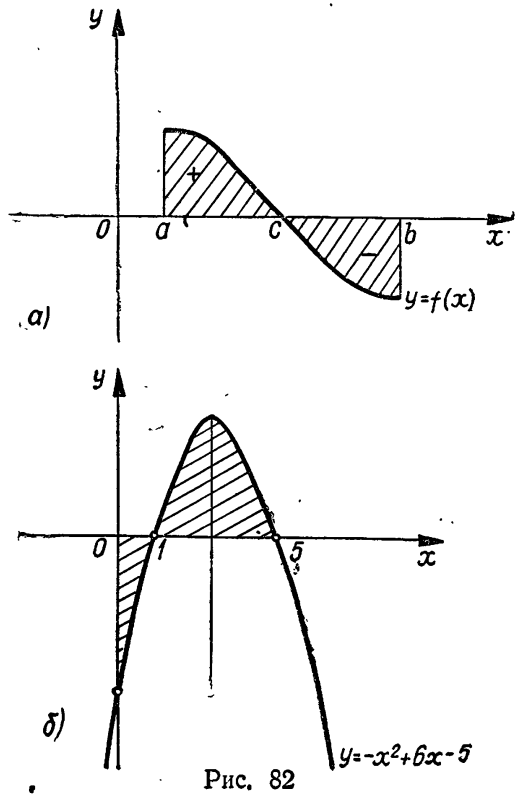


Рис. 82

Из рис. 82, *б* видно, что площадь заданной фигуры будет равна

$$S = \left|\int_0^1 (-x^2+6x-5)\,dx\right| + \int_1^5 (-x^2+6x-5)\,dx =$$

$$= \left|\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right)\right|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right)\Big|_1^5 = 13.$$

1288. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

1) окружностью $x^2+y^2=R^2$;
2) одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и осью Ox;
3) гиперболой $xy=7$ и прямыми $x=2$, $x=5$, $y=0$;
4) кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $y=0$;
5) параболой $y=4-x^2$ и осью абсцисс;
6) полукубической параболой $y^2=x^3$, осью ординат и прямой $y=2$;
7) цепной линией $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и прямыми $x=-a$, $x=a$;
8) кубической параболой $y=x^3$, прямой $y=2$ и осью Oy;
9) кривыми $y=e^x$, $y=e^{-x}$ и прямой $y=4$;
10) эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
11) линиями $y=x^2$ и $y=\frac{2}{1+x^2}$.

1289. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^2$, $y=x$; 2) $y^2+8x=16$, $y^2-24x=48$;
3) $y=x^2-6x+9$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{12}=1$; 4) $y=x^2-2x$, $y-3=0$;
5) $y=x^2$, $xy=8$, $x=6$; 6) $y=x^3$, $y=2x$, $y=x$;
7) $y=-x^2+4x-3$, $y=0$.

1290. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

1291. Вычислить площадь фигуры, заключенной между локоном Аньези $y=\frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y=\frac{1}{2}x^2$.

1292. Найти площади двух фигур, ограниченных параболой $y^2=6x$ и окружностью $x^2+y^2=16$.

1293. Найти площади двух фигур, ограниченных кривыми $y=\frac{1}{2}x^2$ и $x^2+y^2=8$.

1294. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2=x^3(2-x)$.

§ 5. Длина дуги кривой

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$ в промежутке $[a, b]$ и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную в указанном промежутке, то длина дуги кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$, $x = b$, определяется по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (1)$$

Если кривая задана уравнением $x = \varphi(y)$ в промежутке $[c, d]$ и функция $\varphi(y)$ имеет непрерывную производную в этом промежутке, то длина дуги будет определяться по формуле

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2}\, dy. \qquad (2)$$

1295. Вычислить длину окружности

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Решение. Дифференцируя данное уравнение, находим $x\,dx + y\,dy = 0$, отсюда $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Воспользуемся формулой (1), найдем длину дуги AB, т. е. $\frac{1}{4}$ часть окружности (рис. 83):

$$\frac{1}{4}\, s = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx = \int_0^R \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}\, dx =$$

$$= \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = R\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)\Big|_0^R = \frac{1}{2}\pi R,$$

откуда

$$s = 2\pi R.$$

В этой задаче можно было применить формулу (2).

1296. Вычислить длину дуги параболы $y^2 = 4x$ от вершины до точки $M(1; 2)$.

Решение. Применим формулу (2). Из уравнения параболы $x = \frac{y^2}{4}$, $x' = \frac{y}{2}$, по условию y изменяется от 0 до 2, следовательно,

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4 + y^2}\, dy.$$

Известно, что $\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$ (см. ответ задачи 1140). Воспользуемся этим результатом:

$$s=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+4}+\frac{4}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)\right]\Big|_0^2=$$
$$=\sqrt{2}+\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)-\ln 2=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

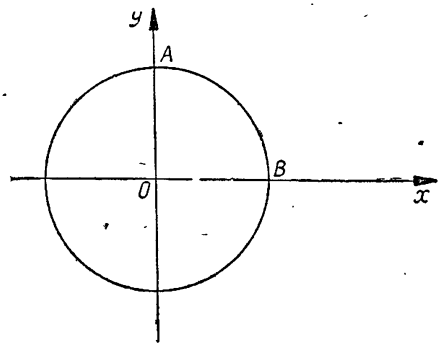


Рис. 83

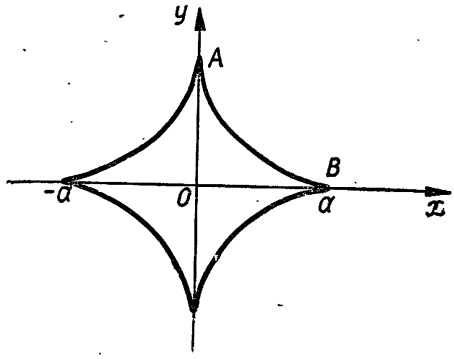


Рис. 84

1297. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln x$, содержащейся между точками, для которых $x=\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{8}$.

Решение. Воспользуемся формулой (1). Из уравнения кривой найдем $y'=\frac{1}{x}$, следовательно,

$$s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$$

Применим подстановку $\sqrt{x^2+1}=t$, $x^2+1=t^2$, $xdx=tdt$. Если $x=\sqrt{8}$, то $t=3$, если $x=\sqrt{3}$, то $t=2$, следовательно,

$$s=\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_2^3\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt=\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$
$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\Big|_2^3=\left(3+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{4}\right)-$$
$$-\left(2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

1298. Найти длину астроиды

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

Решение. Применим формулу (1), вычислим длину дуги AB, т. е. $\frac{1}{4}$ часть астроиды (рис. 84). Найдем производную от неявной функции y по переменной x, получим

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x=0,$$

откуда

$$y'_x=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \text{и} \quad \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=a^{\frac{1}{3}}\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\Big|_0^a=\frac{3a}{2} \quad \text{и} \quad s=6a.$$

1299. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$ от начала координат до точки $(5;\ 5\sqrt{5})$.

1300. Найти длину цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, содержащейся между точками, для которых $x=0$ и $x=a$.

1301. Найти длину параболы $y=4-x^2$ между точками пересечения ее с осью Ox.

1302. Вычислить длину дуги параболы $x=y^2$ от $y=0$ до $y=1$.

1303. Найти длину дуги кривой $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=4$.

1304. Вычислить длину линии $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=a\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$.

1305. Вычислить длину линии $y^2=9-x$ между точками пересечения ее с осью Oy.

1306. Вычислить длину линии $x^2=4-y$ между точками пересечения ее с осью Ox.

§ 6. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции (рис. 85), ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, непрерывной кривой $y=f(x)$ и отрезком оси Ox, определяется по формуле

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx \quad \text{или} \quad V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции (рис. 86), ограниченной прямыми $y = c$, $y = d$, непрерывной кривой $x = \varphi(y)$ и отрезком оси Oy, определяется по формуле

$$V = \pi \int_c^d x^2\,dy \quad \text{или} \quad V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \tag{2}$$

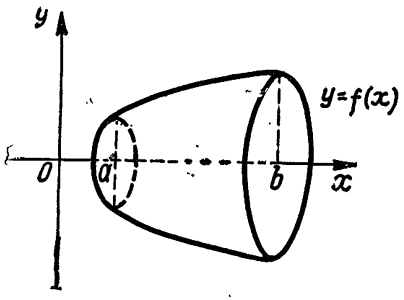


Рис. 85

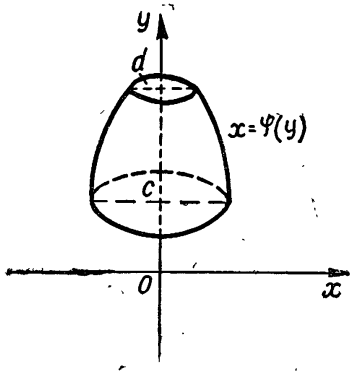


Рис. 86

1307. Эллипс, большая ось которого равна $2a$, малая — $2b$ $(a > b)$, вращается: 1) вокруг большой оси; 2) вокруг малой оси. Найти объемы получающихся эллипсоидов вращения. В частном случае определить объем шара.

Решение. Напишем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Воспользовавшись формулой (1), найдем объем тела, образованного при вращении эллипса вокруг оси Ox. Из уравнения эллипса

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

По условию большая полуось эллипса равна a, следовательно, промежуток интегрирования будет от $-a$ до a (рис. 87):

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{2}{3}\pi ab^2,$$

откуда

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Найдем объем тела, образованного при вращении эллипса вокруг оси Oy. Воспользуемся формулой (2).

Из уравнения эллипса

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2).$$

По условию малая полуось эллипса равна b, следовательно, промежуток интегрирования будет от $-b$ до b:

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)\,dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^b (b^2 - y^2)\,dy = \frac{2}{3}\pi a^2 b,$$

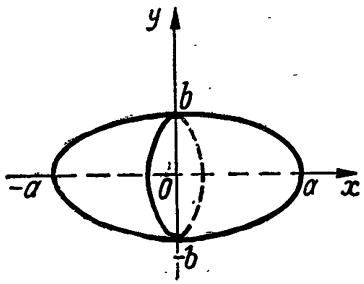


Рис. 87

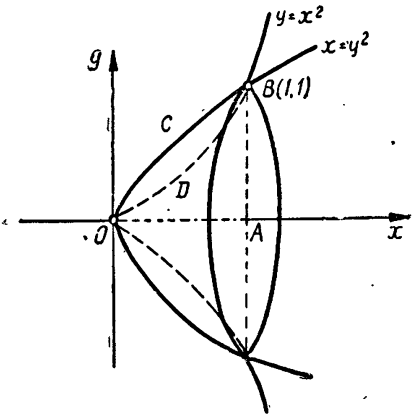


Рис. 88

откуда

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Частный случай эллипсоида вращения, когда $a = b$, есть шар. Таким образом, объем шара $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, где a — радиус шара.

1308. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $x = y^2$.

Решение. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x, \end{cases}$$

получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, откуда точки пересечения кривых $O(0; 0)$ и $B(1; 1)$. Как видно (рис. 88), искомый объем тела вращения равен разности двух объемов, образованных вращением вокруг оси Ox криволинейных трапеций $OCBA$ и $ODBA$:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 x\,dx - \pi\int_0^1 x^4\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi.$$

1309. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$, прямыми $y = 1$, $y = 2$ и осью Oy.

Решение. Применим формулу (2). Из уравнения кривой находим $x = \frac{4}{y}$, пределы интегрирования даны по условию: $c = 1$, $d = 2$. Следовательно,

$$V = \pi\int_c^d x^2\,dy = \pi\int_1^2 \frac{16}{y^2}\,dy = \pi\left(-\frac{16}{y}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= 16\pi\frac{1}{y}\Big|_2^1 = 16\pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 8\pi.$$

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями.

1310. $x = y^2$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox и оси Oy.

1311. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$ и осью Ox вокруг оси Oy.

1312. $xy = -2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ вокруг оси Ox.

1313. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ вокруг оси Ox и оси Oy.

1314. $y^2 = (x + 4)^3$ и $x = 0$ вокруг оси Ox и оси Oy.

1315. $y = \sin x$ (одной полуволной) и $y = 0$ вокруг оси Ox.

1316. $y = \sin^2 x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ и $y = 0$ вокруг оси Ox.

1317. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$ и $y = 0$ вокруг оси Oy.

1318. $y = 4x - x^2$ и $y = x$ вокруг оси Ox.

1319. $y = xe^x$, $x = 1$ и $y = 0$ вокруг оси Ox.

1320. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси Ox.

1321. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x = -a$, $x = a$ и $y = 0$ вокруг оси Ox.

1322. Найти объем тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси Ox.

§ 7. Приложения определенных интегралов к решению физических задач

Выше (§ 4) была рассмотрена задача о нахождении площади криволинейной трапеции, приведшая к понятию определенного интеграла. Рассмотрим еще одну задачу, которая также приво-

дит к понятию определенного интеграла. Решим эту задачу по аналогии с первой.

Пусть материальная точка M движется под действием непрерывно меняющейся силы, направление которой совпадает с направлением движения точки по прямой Os (рис. 89).

Положение точки на прямой Os и значение переменной силы $F(s)$, являющейся непрерывной функцией от s, определяются координатой этой точки. Наша задача — найти работу, произведенную переменной силой $F(s)$ на пути от a до b. Если бы сила была постоянной по величине и направлению,

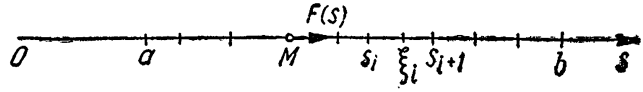


Рис. 89

совпадающему с движением точки, то работа выразилась бы произведением силы F на пройденный путь:

$$A = F(b - a). \tag{1}$$

Однако если сила $F(s)$ есть переменная, то формула (1) неприменима. Определим работу переменной силы $F(s)$ на указанном пути следующим образом.

Промежуток $[a, b]$ разделим на n частей. Пусть координаты точек деления будут

$$a = s_0 < s_1 \ldots < s_i < s_{i+1} < \ldots < s_n = b.$$

На элементарном пути $[s_i, s_{i+1}]$ будем считать приближенно силу $F(s)$ постоянной и равной значению функции в некоторой точке ξ_i сегмента $[s_i, s_{i+1}]$, т. е. $s_i \leqslant \xi_i \leqslant s_{i+1}$, тогда элементарная работа, произведенная силой на пути $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$, выразится по формуле (1):

$$A_i \approx F(\xi_i)\,\Delta s_i,$$

и вся работа, произведенная силой на пути от a до b, приближенно будет равна

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\,\Delta s_i. \tag{2}$$

Из выражения (2) видно, что чем меньше длины частичных промежутков Δs_i $(i = 0,1, \ldots, n-1)$, тем сумма (2) будет ближе к истинному значению работы, произведенной силой на пути $[a, b]$. Следовательно, естественно принять за работу A предел

суммы (2) при стремлении наибольшего из частичных промежутков к нулю, т. е.

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\,\Delta s_i, \tag{3}$$

где $\Delta s = \max \Delta s_i$.

Следовательно, работа равна интегралу

$$A = \int_a^b F(s)\,ds. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что задачи на вычисление площади криволинейной трапеции и работы переменной силы с математической точки зрения одинаковы. Решение этих задач и многих других сводится к составлению интегральных сумм

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

с последующим предельным переходом, т. е. к нахождению определенного интеграла.

Однако при решении задачи с применением определенного интеграла, аналогичной разобранным выше, обычно интегральную сумму по условию задачи не составляют, а находят дифференциал (элемент) интересующей нас величины, являющейся функцией некоторой переменной. После этого путем интегрирования (суммирования с предельным переходом) получают искомую величину. Например, в задаче на определение площади криволинейной трапеции (рис. 90) сначала находят дифференциал переменной площади $S(x)$

$$dS = f(x)\,dx \quad (dx = \Delta x), \tag{5}$$

приближенно равный приращению площади ΔS при условии, что x получило приращение Δx. Из равенства (5) находят

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично в задаче на определение работы, произведенной переменной силой $F(s)$, сначала находим элементарную работу

$$dA = F(s)\,ds \quad (\Delta s = ds), \tag{6}$$

приближенно равную приращению работы ΔA на элементарном пути $\Delta s = (s + \Delta s) - s$, и из равенства (6) получаем работу, произведенную силой $F(s)$ на всем пути от a до b:

$$A = \int_a^b F(s)\,ds.$$

1323. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса $R = 6$ *м*, диаметр которого находится на поверхности воды.

Решение. Сила давления жидкости на площадку площадью S при глубине погружения x равна

$$P = \gamma x S,$$

где γ — удельный вес жидкости.

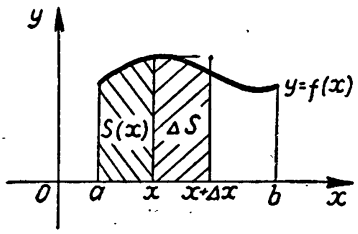


Рис. 90

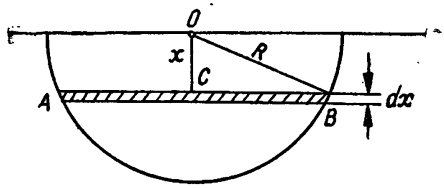


Рис. 91

Полукруг разделим на элементарные полоски прямыми, параллельными поверхности воды. Заштрихованную полоску приближенно примем за прямоугольник с основанием AB и высотою dx (рис. 91) и допустим, что все точки этой полоски находятся на одной глубине $x\,(0 \leqslant x \leqslant R)$. Такое допущение сделать можно, так как dx мало. Элементарная площадь полоски

$$dS = AB\,dx = 2\sqrt{OB^2 - OC^2}\,dx = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Давление воды на полоску, находящуюся на глубине x, будет равно

$$dP = \gamma x\,dS = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\gamma x\,dx,$$

откуда

$$P = \int_0^R 2\gamma x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\gamma\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= -2\gamma\int_R^0 t^2\,dt = 2\gamma\int_0^R t^2\,dt = \frac{2\gamma t^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2\gamma R^3}{3}$$

(применили подстановку $\sqrt{R^2 - x^2} = t$, $R^2 - x^2 = t^2$, $x\,dx = -t\,dt$; если $x = 0$, то $t = R$, если $x = R$, то $t = 0$). Известно, что удельный вес воды (вес 1 $см^3$) равен 1 $Г$, следовательно, вес 1 $м^3$ воды равен 1000 $кГ$. В полученном результате R выражено в метрах ($R = 6$ *м*), поэтому надо положить $\gamma = 1000$ $кГ$. С учетом этого получим

$$P = \frac{2 \cdot 6^3 \cdot 1000}{3}\ кГ = 144000\ кГ \approx 144000 \cdot 9{,}81\ н =$$

$$= 1412640\ н \approx 14{,}13\ бар$$

(*н* (ньютон) — единица силы (веса) в Международной системе единиц (СИ); 1 *кГ* ≈ 9,81 *н*; 1 *бар* = 0,987 *атм*).

1324. Скорость движения точки $v = 0{,}5t^3$ *м/сек*. Найти путь s, пройденный точкой за время $T = 8$ *сек* после начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

Решение. Из дифференциального исчисления известно, что $v = \frac{ds}{dt}$, следовательно, $\frac{ds}{dt} = 0{,}5t^3$, откуда $ds = 0{,}5t^3dt$. Учитывая, что $0 \leqslant t \leqslant 8$, имеем:

$$s = \int_0^8 0{,}5t^3dt = 0{,}5\,\frac{t^4}{4}\Big|_0^8 = 512 \text{ м};$$

$$v_{ср} = \frac{s}{T} = \frac{512}{8} = 64 \text{ м/сек}.$$

1325. Котел имеет форму параболоида вращения (рис. 92). Радиус его основания $R = 3$ *м*, глубина $H = 5$ *м*. Котел наполнен жидкостью, удельный вес которой 0,8 *Г/см*^{3}. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

Решение. В плоскости сечения xOy AOB есть парабола, уравнение которой $y = ax^2$. Найдем параметр a. Координаты точки B должны удовлетворять этому уравнению, т. е. $H = aR^2$, отсюда $a = \frac{H}{R^2}$, следовательно, $y = \frac{H}{R^2}x^2$.

Разделим параболоид на слои плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Пусть толщина слоя на глубине $H - y$ равна dy. Тогда, принимая приближенно слой за цилиндр, получим его объем

$$dV = \pi x^2 dy. \qquad \text{(а)}$$

Из уравнения параболы найдем $x^2 = \frac{yR^2}{H}$. Подставив это значение в формулу (а), получим

$$dV = \frac{\pi y R^2}{H}\,dy,$$

т. е. вес слоя жидкости равен $\gamma dV = \frac{\pi y R^2 \gamma}{H}\,dy$. Следовательно, чтобы выкачать жидкость с глубины $H - y$, потребуется затратить элементарную работу

$$dA = \frac{\pi y R^2 \gamma (H - y)}{H}\,dy.$$

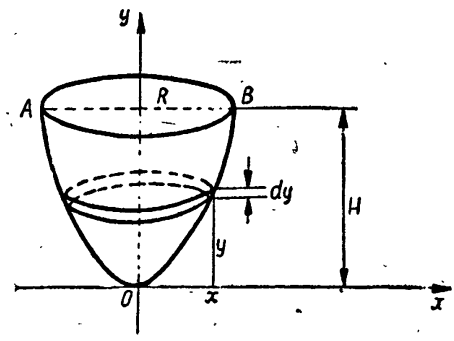


Рис. 92

Учитывая, что $0 \leqslant y \leqslant H$, получаем

$$A = \int_0^H \frac{\pi y R^2 \gamma (H-y)}{H}\, dy = \frac{\pi R^2 \gamma}{H} \int_0^H y(H-y)\, dy =$$

$$= \frac{\pi R^2 \gamma}{H}\left(\frac{Hy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^H = \frac{\pi R^2 \gamma}{H}\left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right) = \frac{1}{6}\pi R^2 \gamma H^2.$$

Подставляя значения R и H, выраженные в метрах, и $\gamma = 800$ *кГ*, находим искомую работу

$$A = \frac{1}{6}\pi 3^2 \cdot 800 \cdot 5^2 = 30000\pi\ (кГм) \approx 30000 \cdot 9{,}81\pi\ (дж) =$$

$= 294300\pi$ (*дж*) (*дж* (джоуль) — единица работы в Международной системе единиц; 1 *кГм* $\approx$ 9,81 *дж*).

1326. Скорость движения тела задана формулой $v = \sqrt{1+2t}$ *м/сек*. Найти путь, пройденный телом за первые 10 *сек* после начала движения.

1327. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха определяется формулой

$$v = v_0 - gt,$$

где t — время; g — ускорение силы тяжести. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через t *сек* от момента бросания?

1328. Определить давление воды на погруженную в нее вертикально треугольную площадку, вершина которой расположена на поверхности жидкости, основание треугольника равно a и параллельно поверхности жидкости, высота треугольника равна h.

1329. Плотина имеет форму трапеции. Вычислить давление воды на плотину, если известно, что верхнее основание плотины $a = 400$ *м*, нижнее $b = 100$ *м*, а высота $h = 20$ *м*.

1330. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 10 *м* и высотой 6 *м*. Определить также давление на нижнюю половину шлюза.

1331. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла полусферической формы, имеющего радиус $R = 10$ *м*.

1332. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из вертикальной цилиндрической цистерны, имеющей радиус основания $R = 2$ *м* и высоту $H = 4$ *м*. Удельный вес жидкости 0,9 *Г/см*^{3}.

1333. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз; радиус основания сосуда $R = 3$ *м* и высота $H = 8$ *м*.

§ 8. Несобственные интегралы

1. Рассмотрим интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, +\infty)$, тогда полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если существует конечный предел (1), то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае интеграл расходится. Аналогично

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

2. Исследуем интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c промежутка $[a, b]$ и непрерывна в этом промежутке за исключением точки $x = c$, то полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Если в правой части равенства (2) существуют конечные пределы, то несобственный интеграл сходится, в противном случае — расходится.

При $c = a$ или $c = b$ имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

1334. Найти несобственные интегралы:

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$; 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$; 4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение. 1) Подынтегральная функция непрерывна в промежутке $[0, +\infty)$, следовательно, по определению

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b}+1) = 1.$$

Известно, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $y = b$ и от-

резком оси Ox, выражается интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$. В этом и состоит геометрический смысл определенного интеграла (см. § 4). Если интеграл несобственный сходящийся, то его геометрический смысл тот же, что и собственного определенного интеграла. Так, вычислив данный несобственный сходящийся интеграл, мы получили значение площади плоской фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = e^{-x}$, прямой $x = 0$ и осью Ox (рис. 93, *а*).

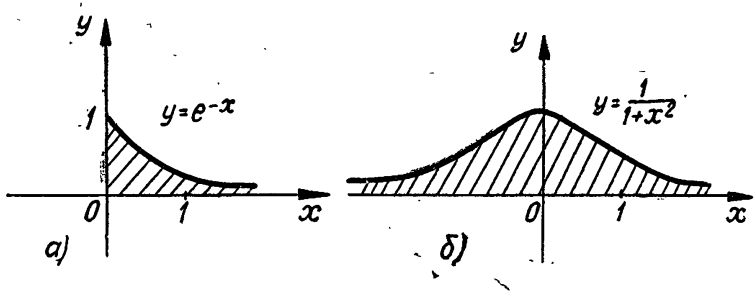


Рис. 93

2) По определению имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0 +$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b = -\operatorname{arctg}(-\infty) + \operatorname{arctg}(+\infty) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Геометрически данный несобственный сходящийся интеграл выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью Ox, являющейся горизонтальной асимптотой (рис. 93, *б*).

3) Подынтегральная функция непрерывна в промежутке $[1, +\infty)$, следовательно,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Данный интеграл расходится.

4) $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Интеграл сходится и выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = 1$, $y = 0$ и графиком функции $y = \frac{1}{x^2}$.

1335. Найти несобственные интегралы:

$$1)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad 2)\ \int_0^2 \frac{dx}{x};\quad 3)\ \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}};\quad 4)\ \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

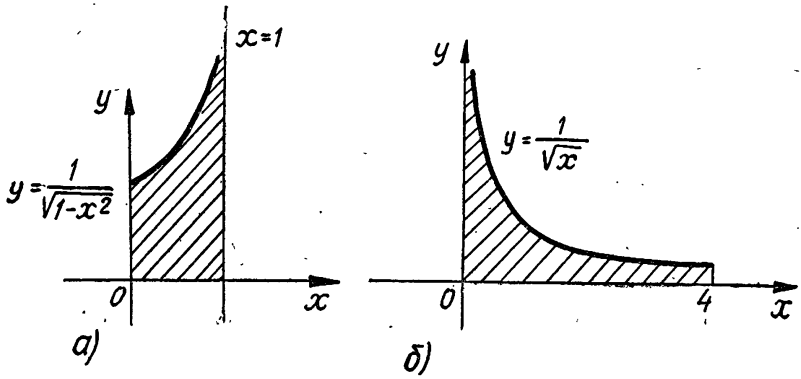


Рис. 94

Решение. 1) Подынтегральная функция терпит разрыв (обращается в бесконечность) в точке $x = 1$, во всех остальных точках промежутка $[0, 1]$ она непрерывна. Пользуясь определением п. 2, имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}[\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Получили значение площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Oy, графиком подынтегральной функции и вертикальной асимптотой $x = 1$ (рис. 94, *а*).

$$2)\ \int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 2 - \ln\varepsilon) = \ln 2 + \infty = +\infty.$$

Интеграл расходится.

$$3)\ \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to 0} 2(\sqrt{4} - \sqrt{\varepsilon}) = 4.$$

Интеграл сходится. Площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, прямой $x=4$ и асимптотой $x=0$, равна 4 (рис. 94, *б*).

4) Подынтегральная функция непрерывна в промежутке [0,2] за исключением точки $x=1$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль, следовательно, в окрестности этой точки функция не ограничена:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}+\int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

Если оба интеграла в правой части равенства сходятся, то сходится и данный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}-\ln 3\right)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon}=\infty,$$

откуда уже следует, что рассматриваемый интеграл расходится.

Найти несобственные интегралы:

1336. $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$.

1337. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$.

1338. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

1339. $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

1340. $\int_0^{\infty}\cos x\,dx$.

1341. $\int_0^1 \ln x\,dx$.

1342. $\int_1^2\frac{dx}{x^2-x-2}$.

1343. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+7}$.

1344. $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1345. 1) $\int_1^3\frac{dx}{(x-2)^2}$; 2) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

1346. Найти объем тела вращения, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $x=1$ $(x\geqslant 1)$, $y=0$, вокруг оси Ox.

1347. Скорость движения точки $v=te^{-0,1t}$ *м/сек*. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

§ 9. Приближенное вычисление определенных интегралов

Известно, что определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от любой непрерывной функции $f(x)$ существует, однако не для всякой непрерывной функции, как уже говорилось выше, первообразная функция выражается через элементарные функции в конечном виде. В этих случаях формула Ньютона — Лейбница неприменима, поэтому для вычисления интегралов обычно используют один из способов приближенных вычислений. Впрочем методы приближенного вычисления интегралов применяют и в некоторых других случаях.

Рассмотрим две формулы приближенного вычисления определенных интегралов.

1. Формула прямоугольников. Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$, то определенный интеграл приближенно равен интегральной сумме

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i). \tag{1}$$

Данный промежуток $[a, b]$ разделим точками на n равных частей. Обозначим абсциссы точек деления через

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

где

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = h \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Составим следующие интегральные суммы, которые будут приближенными значениями интеграла.

Пусть в выражении (1) $\xi_i = x_i$, тогда $f(\xi_i) = f(x_i) = y_i$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h f(x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}). \tag{2}$$

Пусть теперь $\xi_i = x_{i+1}$, тогда $f(\xi_i) = f(x_{i+1}) = y_{i+1}$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h f(x_{i+1}) = h \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n). \tag{2'}$$

Геометрически по формуле прямоугольников площадь криволинейной трапеции приближенно равняется площади ступен-

чатой фигуры, состоящей из прямоугольников (рис. 95; см. также рис. 76).

Погрешность формулы прямоугольников

$$\Delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^2}{n} |y'|, \tag{3}$$

где $|y'|$ — наибольшее по абсолютной величине значение производной функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$.

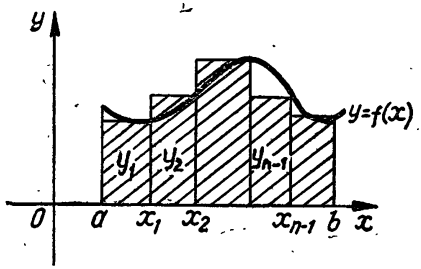


Рис. 95

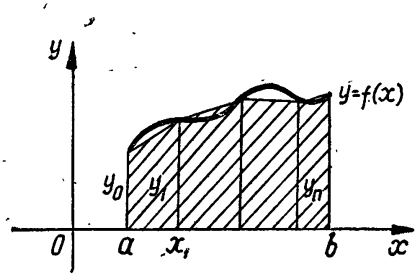


Рис. 96

2. Формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) =$$

$$= h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \tag{4}$$

Геометрически по формуле (4) площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей трапеций (рис. 96).

Погрешность формулы трапеций

$$\Delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} |y''|, \tag{5}$$

где $|y''|$ — наибольшее по абсолютной величине значение второй производной функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$.

1348. Вычислить интеграл $\int_0^6 (x^2+3)\,dx$ по формуле Ньютона — Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбивая промежуток интегрирования на 6 равных частей ($n = 6$). Найти абсолютную и относительную погрешности результатов вычисления по приближенным формулам.

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница

$$I = \int_0^6 (x^2+3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_0^6 = 90.$$

Промежуток [0, 6] разделим на 6 равных частей и составим таблицу значений подынтегральной функции $y = x^2 + 3$:

$x_0 = 0$ $y_0 = 3$ $x_4 = 4$ $y_4 = 19$
$x_1 = 1$ $y_1 = 4$ $x_5 = 5$ $y_5 = 28$
$x_2 = 2$ $y_2 = 7$ $x_6 = 6$ $y_6 = 39$
$x_3 = 3$ $y_3 = 12$ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{6} = 1.$

По формуле прямоугольников (2)

$$I \approx \sum_{i=0}^{5} y_i = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 73.$$

Абсолютная погрешность $\Delta = 90 - 73 = 17$. Относительная погрешность $\delta = \frac{17}{90} \approx 0{,}189 = 18{,}9\%$.

По формуле прямоугольников (2′)

$$I \approx \sum_{i=1}^{6} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 109.$$

Абсолютная погрешность $\Delta = 109 - 90 = 19$. Относительная погрешность $\delta = \frac{19}{90} \approx 0{,}211 = 21{,}1\%$.

По формуле трапеций

$$I \approx \frac{y_0 + y_6}{2} + \sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{3 + 39}{2} + 70 = 91;$$

$$\Delta = 91 - 90 = 1; \quad \delta = \frac{1}{90} \approx 0{,}011 = 1{,}1\%.$$

1349. Зная, что $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$, вычислить приближенно значение $\ln 2$, воспользовавшись формулами прямоугольников и трапеций (при $n = 10$). Оценить абсолютную погрешность полученных результатов.

Решение. Промежуток [1, 2] разделим на 10 равных частей и составим таблицу значений подынтегральной функции $y = \frac{1}{x}$:

$x_0 = 1{,}0$ $y_0 = 1{,}0000$ $x_6 = 1{,}6$ $y_6 = 0{,}6250$
$x_1 = 1{,}1$ $y_1 = 0{,}9091$ $x_7 = 1{,}7$ $y_7 = 0{,}5882$
$x_2 = 1{,}2$ $y_2 = 0{,}8333$ $x_8 = 1{,}8$ $y_8 = 0{,}5556$
$x_3 = 1{,}3$ $y_3 = 0{,}7692$ $x_9 = 1{,}9$ $y_9 = 0{,}5263$
$x_4 = 1{,}4$ $y_4 = 0{,}7143$ $x_{10} = 2{,}0$ $y_{10} = 0{,}5000$
$x_5 = 1{,}5$ $y_5 = 0{,}6667$ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10}.$

По формуле прямоугольников (2)

$$I \approx h \sum_{i=0}^{9} y_i = \frac{1}{10}(y_0 + \ldots + y_9) = \frac{1}{10} \cdot 7{,}1877 \approx 0{,}7188.$$

По формуле прямоугольников (2′)

$$I = h \sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10}(y_1 + \ldots + y_{10}) = \frac{1}{10} \cdot 6{,}6877 \approx 0{,}6688.$$

Оценим абсолютную погрешность по формуле (3). Найдем производную $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Отсюда видно, что наибольшим значением $|y'| = \frac{1}{x^2}$ в промежутке $[1, 2]$ будет $|y'(1)| = 1$. Следовательно, $\Delta(10) \leqslant \frac{(2-1)^2}{10} \cdot 1 = 0{,}1$.

По формуле трапеций (4)

$$I \approx h\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + \sum_{i=1}^{9} y_i\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1 + 0{,}5}{2} + 6{,}1877\right) = \frac{1}{10} \cdot 6{,}9377 \approx$$
$$\approx 0{,}6938.$$

Оценим абсолютную погрешность по формуле (5). Найдем вторую производную $y'' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$. Наибольшим значением $|y''|$ в промежутке $[1, 2]$ будет $|y''(1)| = \frac{2}{1^3} = 2$. Следовательно,

$$\Delta(10) \leqslant \frac{(2-1)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 2 = \frac{1}{600} \approx 0{,}0017.$$

В таблицах Брадиса дается значение $\ln 2 \approx 0{,}6931$, близкое к полученному по формуле трапеций.

Вычислить интегралы по формуле Ньютона — Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, найти абсолютную и относительную погрешности результатов, полученных по приближенным формулам*:

1350. $\int_{-1}^{5} (x^2 - 2)\,dx$ $\quad (n = 6)$.

1351. $\int_{0}^{4} \sqrt{x}\,dx$ $\quad (n = 8)$.

---

* В задачах 1350 — 1354 все вычисления выполнить с тремя десятичными знаками.

Вычислить приближенно по формуле трапеций следующие интегралы, которые не могут быть найдены в конечном виде с помощью элементарных функций:

1352. $\int_0^3 \sqrt{1+x^3}\,dx$ $(n=6)$.

1353. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\,dx$ $(n=10)$.

1354. Зная, что $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$, вычислить приближенно число π, воспользовавшись формулами прямоугольников и трапеций (при $n=10$).

1355. На сколько частей надо разделить промежуток интегрирования интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, чтобы вычислить его с точностью до 0,001 по приближенным формулам прямоугольников и трапеций?

Глава X Дифференциальные уравнения

§ 1. Основные понятия

Уравнение вида

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

связывающее аргумент x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Порядок старшей производной неизвестной функции, входящей в уравнение (1), называется *порядком этого уравнения.* Дифференциальное уравнение (1) будет n-го порядка при условии, что $y^{(n)}$ обязательно входит в это уравнение. Так, например, уравнение $y'' + xy' - x^2 = 0$ — второго порядка, $y^{IV} = 0$ — четвертого порядка, $y' - x = 0$ — первого порядка.

Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (1), обращает его в тождество. График этой функции называется *интегральной кривой.* Если решение задано в неявном виде $f(x,\ y) = 0$, то его обычно называют интегралом.

Процесс отыскания решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*. В общем случае нахождения решений уравнения (1) потребуется n последовательных интегрирований, поэтому общее решение будет содержать n произвольных постоянных, т. е. иметь вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{2}$$

или

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{3}$$

Соотношение (3) называется *общим интегралом уравнения* (1). Придавая в соотношениях (2) или (3) произвольным постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ конкретные числовые значения, получим частное решение или частный интеграл.

1356. Проверить, что следующие функции являются решениями дифференциальных уравнений:

1) $xy' - y = 0$, $y = Cx$;

2) $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2y}{x^2} = 0$, $y = C_1x + C_2x^2$;

3) $v'' + \frac{2}{r}v' = 0$, $v = \frac{C_1}{r} + C_2$.

Решение. 1) Уравнение первого порядка, так как оно содержит производную первого порядка. Найдем производную от данной функции $y' = C$. Подставив в данное уравнение $y = Cx$ и $y' = C$, получим тождество

$$xC - Cx = 0, \quad 0 = 0.$$

2) Уравнение второго порядка, так как оно содержит производную второго порядка. Найдем первую и вторую производные от данной функции, а затем функцию и ее производные подставим в данное уравнение и убедимся, что уравнение обратится в тождество

$$y' = C_1 + 2C_2x, \quad y'' + 2C_2;$$

$$2C_2 - \frac{2}{x}(C_1 + 2C_2x) + \frac{2}{x^2}(C_1x + C_2x^2) = 0, \quad 0 = 0.$$

3) Находим производные по переменной r:

$$v' = -\frac{C_1}{r^2}, \quad v'' = \frac{2C_1}{r^3}.$$

Подставив производные и данную функцию в уравнение, получим тождество

$$\frac{2C_1}{r^3} + \frac{2}{r}\left(-\frac{C_1}{r^2}\right) = 0, \quad 0 = 0.$$

1357. Проверить, что функция $y = x^2 + C$ является решением дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 2x$. Построить се-

мейство интегральных кривых и выделить интегральную кривую, проходящую через точку (1; 2).

Решение. Найдем производную $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x$ и подставим ее в данное уравнение. Получим тождество

$$2x = 2x.$$

Следовательно, $y = x^2 + C$ является решением данного дифференциального уравнения и притом общим, так как оно содержит произвольное постоянное. Уравнение

$$y = x^2 + C \qquad \text{(a)}$$

определяет семейство парабол (рис. 97), которое и будет семейством интегральных кривых. Найдем интегральную кривую (параболу), проходящую через заданную точку (1; 2). Подставив координаты этой точки в уравнение (а), получим $2 = 1^2 + C$, откуда $C = 1$, следовательно, функция $y = x^2 + 1$ является частным решением данного дифференциального уравнения, а ее график (интегральная кривая) будет проходить через заданную точку.

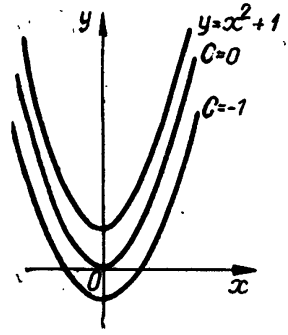


Рис. 97

Проверить, что указанные функции являются решениями дифференциальных уравнений:

1358. $y'' - 2y' + y = 0$, $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x$.

1359. $2xyy' = y^2 - x^2$, $x^2 + y^2 = 2Cx$.

1360. $y'' + y = 0$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

1361. $xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$, $\arcsin\frac{y}{x} = C - x$.

1362. Проверить, что общим интегралом дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ будет $x^2 + y^2 = C$. Построить семейство интегральных кривых и выделить интегральные кривые, проходящие через точки (1; 1), (3; — 4) и (0; 1).

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

или

$$y' = f(x, y), \qquad (2)$$

где y — неизвестная функция; x — независимая переменная.

Общее решение уравнений (1) или (2) имеет вид

$$y = \varphi(x, C) \tag{3}$$

или

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{4}$$

Соотношение (4), как уже говорилось, называют общим интегралом.

Чтобы получить частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения (1) или (2), надо задать значение y_0, которое искомая функция принимает при определенном значении независимого переменного x_0 (начальные условия).

Подставляя x_0 и y_0 в (3) или (4), найдем соответствующее значение $C = C_0$ из уравнений $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или $\Phi(x_0, y_0, C) = 0$.

Подставляя найденное значение C в уравнение (3) или (4), получим частное решение (частный интеграл), удовлетворяющее начальным условиям.

Геометрически это означает, что найдена интегральная кривая $y = \varphi(x, C_0)$, которая проходит через точку $(x_0; y_0)$ и имеет касательную в этой точке, составляющую с положительным направлением оси Ox угол α_0 такой, что $\operatorname{tg}\alpha_0 = y'_0$. Впрочем, еще до нахождения решения $y = \varphi(x, C_0)$, направление касательной в точке $(x_0; y_0)$ нам уже было известно из уравнения (2), так как это уравнение определяет направление касательной интегральной кривой в любой точке $(x; y)$ области определения функции $f(x, y)$.

Заметим, что могут быть случаи, когда из общего решения уравнения некоторые решения не получаются ни при каких значениях C. Такие решения могут быть двух видов: частные или так называемые особые решения. Признаком особого решения служит нарушение свойства единственности, т. е. если интегральная кривая является особым решением $y = \psi(x)$, то через каждую точку этой кривой будет проходить, по крайней мере, еще одна интегральная кривая того же уравнения, имеющая в этой точке ту же касательную.

2. *Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными* называется уравнение вида

$$M(x)\,N(y)\,dx + P(x)\,Q(y)\,dy = 0. \tag{5}$$

Разделив обе части уравнения (5) на произведение $P(x)\,N(y)$ и проинтегрировав, получим общий интеграл уравнения (5) в виде $\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C^*$.

---

* Функции $M(x)$, $N(y)$, $P(x)$ и $Q(y)$ непрерывны.

1363. Проинтегрировать уравнения:

1) $(1+y^2)\,dx-(1+x^2)\,ydy=0$;
2) $xyy'+x^2-1=0$;
3) $\sec^2 x\,\operatorname{tg} y\,dx+\sec^2 y\,\operatorname{tg} x\,dy=0$;
4) $yy'=\dfrac{1+2x}{y}$;
5) $y'=e^{x^2}\ln y$;
6) $\dfrac{dx}{dt}=2t\sqrt{x}$.

Решение. 1) Разделим обе части равенства на произведение $(1+x^2)(1+y^2)$:

$$\frac{dx}{1+x^2}-\frac{y}{1+y^2}\,dy=0.$$

Переменные разделены. Почленно интегрируя, получаем искомый общий интеграл

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\int\frac{y}{1+y^2}\,dy,$$

$$\operatorname{arctg} x=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\ln C\quad(C>0)$$

или

$$\operatorname{arctg} x=\ln C\sqrt{1+y^2}.$$

2) Известно, что $y'=\dfrac{dy}{dx}$, следовательно,

$$xy\frac{dy}{dx}+x^2-1=0.$$

Умножим обе части равенства на dx:

$$xydy+(x^2-1)\,dx=0.$$

Разделим обе части равенства на x:

$$ydy+\frac{x^2-1}{x}\,dx=0.$$

Почленно интегрируя, получаем искомый интеграл

$$\int ydy+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\ln C_1\quad(C_1>0),$$

$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-\ln|x|=\ln C_1,$$

откуда

$$x^2+y^2=\ln C_1^2x^2\ \text{ или }\ x^2+y^2=\ln Cx^2\quad(C=C_1^2).$$

3) Разделим обе части равенства на произведение $\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} x$:

$$\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\,dx+\frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}\,dy=0.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|\operatorname{tg} x|+\ln|\operatorname{tg} y|=\ln|C|\quad(C\neq 0),$$

откуда

$$\ln|\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y|=\ln|C|,$$

следовательно,

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y| = |C|,\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \pm C,\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C_1\ (C_1 = \pm C).$$

4) Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, получаем

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{1+2x}{y}.$$

Умножим обе части равенства на произведение ydx:

$$y^2dy = (1+2x)\,dx.$$

Интегрируя, находим

$$\int y^2dy = \int (1+2x)\,dx,\ \frac{y^3}{3} = x + x^2 + C_1,$$

откуда

$$y^3 = 3x^2 + 3x + 3C_1.$$

Общее решение будет иметь вид

$$y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + C}.$$

5) $\frac{dy}{dx} = e^{x^2} \ln y$, откуда $dy = e^{x^2} \ln y\,dx$.

Разделим обе части равенства на $\ln y$:

$$\frac{dy}{\ln y} = e^{x^2}dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dy}{\ln y} = \int e^{x^2}dx + C.$$

Интегралы $\int \frac{dy}{\ln y}$ и $\int e^{x^2}dx$ не берутся в элементарных функциях, однако исходное дифференциальное уравнение считается проинтегрированным, так как задача сведена к квадратурам (интегралам). Заметим, что $y = 1$ есть частное решение уравнения (проверяется подстановкой в уравнение), из общего решения оно не получается ни при каких значениях C. Это решение было потеряно при делении уравнения на $\ln y$ $(y \neq 1)$.

6) Обе части равенства умножим на dt и разделим на $\sqrt{x}$:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2tdt.$$

Интегрируя, получаем общее решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int tdt,\ 2\sqrt{x} = t^2 + C,\ x = \frac{1}{4}(t^2 + C)^2.$$

Данное уравнение имеет еще одно решение $x = 0$, в чем можно убедиться непосредственно подстановкой его в уравнение. Это решение не получается из общего ни при каких значениях C. Оно является особым.

Построив семейство интегральных кривых $x=\frac{1}{4}(t^2+C)^2$ и интегральную кривую $x=0$, можно убедиться, что прямая $x=0$ состоит сплошь из точек касания с интегральными кривыми упомянутого семейства.

1364. Проинтегрировать следующие уравнения и найти частные решения, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1) $(x+2)\,dy+(y-1)\,dx=0$, $y(1)=2$;

2) $y'=(2y-1)\operatorname{ctg}x$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=5$.

Решение. 1) Находим сначала общий интеграл:

$$\frac{dx}{x+2}+\frac{dy}{y-1}=0,\quad \int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{dy}{y-1}=\ln|C|\ (C\neq 0),$$

$$\ln|x+2|+\ln|y-1|=\ln|C|,\ln|(x+2)(y-1)|=\ln|C|,$$

откуда

$$|(x+2)(y-1)|=|C| \text{ и } (x+2)(y-1)=\pm C$$

или

$$(x+2)(y-1)=C_1\ (C_1=\pm C). \qquad \text{(а)}$$

Подставив в равенство (а) $x=1$, $y=2$, получим $3(2-1)=C_1$, откуда $C_1=3$.

Подставляя найденное значение $C_1=3$ в общий интеграл (а), находим частный интеграл $(x+2)(y-1)=3$, удовлетворяющий начальным условиям.

Имеется еще два частных решения $x=-2$ и $y=1$, которые не получаются из общего решения. Интегральные кривые $x=-2$ и $y=1$ будут асимптотами семейства интегральных кривых (постройте это семейство и их асимптоты).

2) Находим общее решение:

$$\frac{dy}{dx}=(2y-1)\operatorname{ctg}x,\quad \frac{dy}{2y-1}=\operatorname{ctg}x\,dx,$$

$$\int\frac{dy}{2y-1}=\int\operatorname{ctg}x\,dx,\quad \frac{1}{2}\ln|2y-1|=\ln|\sin x|+\ln|C|\ (C\neq 0),$$

$$\ln|2y-1|=2\ln|C\sin x|=\ln C^2\sin^2 x,$$

откуда

$$2y-1=\pm C^2\sin^2 x,\quad 2y-1=C_1\sin^2 x\ (C_1=\pm C^2)$$

и

$$y=\frac{1+C_1\sin^2 x}{2}. \qquad \text{(б)}$$

Подставляя в равенство (б) $x=\frac{\pi}{6}$, $y=5$, получаем

$$5=\frac{1+C_1\cdot\frac{1}{4}}{2},$$

откуда $C_1 = 36$. Это значение C_1 подставим в общее решение (б). Получим частное решение $y = 18\sin^2 x + \frac{1}{2}$, удовлетворяющее начальным условиям.

Проверьте, что $y = \frac{1}{2}$ будет частным решением, которое не получается из общего решения.

Проинтегрировать уравнения:

1365. 1) $y' = \cos x$; 2) $y' = \sin^2 x$; 3) $y' = \cos^3 x$;
4) $y' = 6x^3$; 5) $y' = \sqrt{1-x^2}$; 6) $y' = \ln x + 1$;
7) $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$; 8) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$; 9) $dy - 2\sqrt{y}\,dx = 0$.

1366. 1) $y'\cos^2 x = \sin^2 x$; 2) $y' = 3^{x+y}$.

1367. 1) $\sqrt{1-x^2}dy + \sqrt{1-y^2}dx = 0$;
2) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

1368. 1) $\operatorname{tg} x dy - (1+y)\,dx = 0$; 2) $(1+y^2)\,y' - y = 0$.

1369. 1) $t^2 s' - t + 1 = 0$; 2) $d\rho - \rho^2 \operatorname{tg}\varphi d\varphi = 0$.

1370. 1) $y'\sin x = y\ln y$;
2) $\sqrt{6y-y^2}dx - (4+x^2)\,dy = 0$.

Проинтегрировать следующие уравнения и построить интегральные кривые, проходящие через заданные точки:

1371. 1) $ydx + xdy = 0$; (2; -3), (-2; -4), (2; 3);
2) $x^2y' + y^2 = 0$; (1; -1);
3) $y' = \sqrt[3]{y^2}$ (0; 1);
4) $y' = -2xy$; (0; 3).

Найти частные решения (или интегралы) уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

1372. 1) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}y' = 0$; $y = -2$ при $x = 0$;
2) $(1+e^{-x})\,yy' = e^x$; $y(0) = 2$;
3) $y' = \frac{1+y^2}{(1+x^2)\,xy}$; $y(1) = 2$.

3. Функция $f(x, y)$ называется *однородной нулевой степени*, если при любом $t \neq 0$ выполняется тождество

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Например, такими функциями будут

$$f(x, y) = \ln\frac{y}{x} \text{ и } f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

так как

$$\ln\frac{ty}{tx} = \ln\frac{y}{x} \text{ и } \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Уравнение вида

$$y' = f(x, y) \qquad (6)$$

называется *однородным*, если $f(x, y)$ — однородная функция нулевой степени.

Однородное уравнение с помощью подстановки $y = ux$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция, приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

1373. Проинтегрировать уравнение

$$xdy = (x + y)\,dx$$

и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y = 2$ при $x = -1$.

Решение. Данное уравнение решим относительно производной. Получим уравнение вида (6):

$$y' = \frac{x+y}{x}.$$

В правой части этого уравнения функция однородная нулевой степени, следовательно, исходное уравнение однородное. Применим подстановку $y = ux$. Найдем производную $y' = u'x + u$ и в уравнение вместо y и y' подставим их новые значения. Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$u'x + u = \frac{x + ux}{x},$$

отсюда

$$u'x = 1, \quad du = \frac{dx}{x},$$

$$u = ln|x| + C, \quad \frac{y}{x} = \ln|x| + C, \quad y = x\ln|x| + Cx.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Если $x = -1$, $y = 2$, то

$$2 = -1\ln 1 - C, \quad C = -2, \quad y = x\ln|x| - 2x.$$

1374. Проинтегрировать уравнения:

1) $(y - x)\,ydx + x^2dy = 0$;

2) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$;

3) $(y^2 - x^2)\,dx + 2xydy = 0$.

1375. Проинтегрировать следующие уравнения и выделить интегральную кривую, проходящую через данную точку $M(x_0; y_0)$:

1) $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$; $M(1; 0)$;

2) $y^2dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$; $M(1; -5)$;

3) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; $M(1; 1)$; $M(-1; 0)$.

4. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = f(x), \tag{7}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции в некотором интервале.

Если функция $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение

$$y' + p(x)\,y = 0 \tag{8}$$

называется *однородным*, при $f(x) \neq 0$ — *неоднородным*. Уравнение (8) — уравнение с разделяющимися переменными. Уравнение (7) интегрируется с помощью подстановки

$$y = uv, \tag{9}$$

где функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Найдем производную функции (9):

$$y' = u'v + uv'. \tag{10}$$

Подставив выражения (9) и (10) в уравнение (7), получим

$$u'v + uv' + p(x)\,uv = f(x).$$

Сгруппируем члены в левой части равенства

$$u'v + u\,[v' + p(x)\,v] = f(x). \tag{11}$$

Определяем функцию v так, чтобы коэффициент при u обратился в нуль:

$$v' + p(x)\,v = 0. \tag{12}$$

Интегрируем это уравнение:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)\,v, \quad \frac{dv}{v} = -p(x)\,dx, \quad \ln v = -\int p(x)\,dx,$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \tag{13}$$

Функция (13) есть частное решение уравнения (12).

Учитывая (13), (12) и (11), получим уравнение $u'v = f(x)$, из которого находим функцию

$$u = \int \frac{f(x)}{v}\,dx + C. \tag{14}$$

Найденные функции (14) и (13) подставим в (9), получим искомое решение уравнения (7).

1376. Проинтегрировать уравнение

$$x^2y' + xy = 1 \quad (x \neq 0)$$

и найти частные решения, удовлетворяющие начальным условиям: $y = 3$ при $x = 1$; $y = -5$ при $x = -e$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение приведем к виду (7):

$$y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{1}{x^2}.$$

Применим подстановку

$$y = uv.$$

Найдем производную

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставив эти значения y и y' в данное уравнение, получим

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{1}{x^2}$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2}. \qquad \text{(а)}$$

Потребуем, чтобы функция v обращала в нуль выражение, стоящее в скобках уравнения (а). Такой функцией может быть любое частное решение уравнения

$$v' + \frac{v}{x} = 0. \qquad \text{(б)}$$

Интегрируем это уравнение и находим частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln v = -\ln x = \ln\frac{1}{x},$$

откуда

$$v = \frac{1}{x}. \qquad \text{(в)}$$

Подставив в (а) полученное значение v, получим

$$\frac{1}{x}u' = \frac{1}{x^2},$$

отсюда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad \int du = \int\frac{dx}{x}, \quad u = \ln|x| + C.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения будет

$$y = \frac{\ln|x| + C}{x}.$$

Найдем частные значения, удовлетворяющие начальным условиям.

Если $y = 3$ при $x = 1$, то

$$3 = \frac{\ln 1 + C}{1}, \quad C = 3, \quad y = \ln|x| + 3.$$

Если $y = -5$ при $x = -e$, то

$$-5 = \frac{\ln|-e| + C}{-e}, \quad C = 5e - 1, \quad y = \ln|x| + 5e - 1.$$

1377. Проинтегрировать уравнения:

1) $x^2y' + 2xy = \ln x$; 2) $e^x(y + y') = 1$;

3) $y'\sin x - y = 1 - \cos x$.

1378. Проинтегрировать следующие уравнения и найти интегральную кривую, проходящую через данную точку $M(x_0; y_0)$:

1) $xy' + 2y = x^3$ $(x \neq 0)$; $M(-1; 1)$, $M(1; -2)$;

2) $y' - \frac{y}{x} = 3x$; $M(1; 3)$, $M(1; -5)$;

3) $y' + xy = x$; $M(0; 2)$, $M(-1; 1)$.

§ 3. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Для нахождения неизвестной функции по условиям задачи составляют дифференциальное уравнение, интегрируют его и находят искомую функцию. При составлении дифференциального уравнения учитывают геометрический и физический смысл производной.

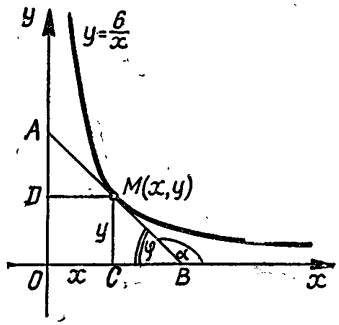


Рис. 98

1379. Найти кривую, проходящую через точку (2; 3) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомой кривой, тогда по условию $AM = MB$ (рис. 98), следовательно, $OC = CB$, $OB = 2OC = 2x$ и аналогично $OA = 2OD = 2y$. Далее, так как $\varphi = \pi - \alpha$, то $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{y}{x}$, откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{x} \text{ или } y' = -\frac{y}{x}. \qquad \text{(а)}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (а), получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = \ln C,$$

$$\ln|y| + \ln|x| = \ln C, \quad \ln|xy| = \ln C,$$

$$xy = C \text{ или } y = \frac{C}{x} \; (C \neq 0). \qquad \text{(б)}$$

Итак, общим решением уравнения (а) является семейство равносторонних гипербол с асимптотами, совпадающими с осями координат.

Теперь найдем гиперболу, проходящую через заданную точку (2; 3). Подставив в уравнение (б) координаты этой точки, получим $2 \cdot 3 = C$, откуда $C = 6$. Следовательно, искомая кривая $xy = 6$.

1380. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству R. Найти зависимость R от t; составить дифференциальное уравнение и определить коэффициент пропорциональности из опытных данных, согласно которым через 1600 лет останется половина наличного количества радия.

Решение. По условию задачи $\frac{dR}{dt} = kR$ (скорость изменения есть производная по времени), откуда $\frac{dR}{R} = kdt$,

$$\ln R = kt + \ln C, \quad \ln R = \ln e^{kt} + \ln C = \\ = \ln Ce^{kt}, \quad R = Ce^{kt}. \qquad (в)$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ количество радия $R = R_0$, тогда $R_0 = Ce^{k0}$, откуда $C = R_0$. Подставляя это значение C в выражение (в), получаем

$$R = R_0 e^{kt}. \qquad (г)$$

Коэффициент k находим из условия, что если $t = 1600$, то $R = \frac{R_0}{2}$. Подставляя эти значения в формулу (г), получаем

$$\frac{R_0}{2} = R_0 e^{1600k},$$

откуда $\frac{1}{2} = e^{1600k}$, $-\ln 2 = 1600k$, $k = \frac{-\ln 2}{1600} \approx -0{,}00043$. Следовательно, искомая функция $R = R_0 e^{-0{,}00043t}$.

1381. Найти кривую, в каждой точке которой касательная перпендикулярна к радиус-вектору точки касания.

1382. Найти кривые, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат. Выделить и построить кривую, которая проходит через точку (2; 4).

1383. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, тангенс наклона которой в каждой точке равен $\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$.

1384. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 2), тангенс наклона которой во всякой точке равен $\frac{1}{3y^2}$.

1385. Тело, выйдя из состояния покоя, движется со скоростью, которая определяется в каждый момент времени t по формуле $v = 5t^2 + 2$ *м/сек*. Найти закон движения тела и путь, пройденный телом за 3 *сек*.

1386. Найти закон движения и скорость движущегося тела, если скорость его возрастает пропорционально пройденному пути и если в начальный момент движения тело находилось в 8 *м* от начала отсчета пути и имело скорость 24 *м/сек*.

1387. Если температура воздуха равна 10° и тело в течение 30 *мин* охлаждается с 80° С до 30°, то через сколько времени его температура понизится до 20°? (По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды.)

Глава XI Ряды

§ 1. Числовой ряд. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

1. Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

называется *числовым рядом*, а числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — *членами ряда*.

Суммы

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

называются *частичными суммами ряда* (2).

Если последовательность частичных сумм имеет конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{3}$$

то этот предел называется *суммой ряда*. В этом случае ряд называется *сходящимся*.

Если же предел (3) не существует или равен бесконечности, то ряд расходится и суммы не имеет.

2. Рассмотрим необходимый признак сходимости ряда. Если ряд сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{4}$$

При нарушении условия (4) ряд заведомо расходится.

Заметим, что из сходимости ряда (2) следует сходимость его остатка $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$, и, наоборот, из сходимости

остатка ряда следует сходимость исходного ряда. Иначе говоря, если отбросить конечное число n начальных членов ряда, то это не отразится на сходимости (расходимости) ряда.

3. Разберем достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Признак сравнения рядов. Пусть имеем два ряда с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{5}$$

и

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{6}$$

Если, начиная с некоторого номера $n \geqslant N$, выполняется неравенство

$$a_n \leqslant b_n,$$

то из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5) и из расходимости ряда (5) следует расходимость ряда (6).

Признак Даламбера. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд (5) сходится, а при $l > 1$ расходится. При $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Признак Коши. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \,(a_n > 0),$$

то при $l < 1$ ряд (5) сходится, а при $l > 1$ расходится. Если $l = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

1388. Написать пять первых членов ряда по данному общему члену $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Полагая $n = 1$, получаем $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$. Если $n = 2$, то $a_2 = \frac{1}{2\cdot 3}$, если $n = 3$, то $a_3 = \frac{1}{3\cdot 4}$ и далее (при $n = 4; 5$) $a_4 = \frac{1}{4\cdot 5}$, $a_5 = \frac{1}{5\cdot 6}$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots$$

1389. Написать пять первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$.

Решение. Общий член $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$. Полагая $n = 1$, получаем $a_1 = (-1)^0 \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Если $n = 2$, то $a_2 =$

$= (-1)\frac{2}{2+1} = -\frac{2}{3}$ и далее (при $n = 3;\ 4;\ 5$) $a_3 = (-1)^2\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, $a_4 = (-1)^3\frac{4}{4+1} = -\frac{4}{5}$, $a_5 = (-1)^4\frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \ldots$$

1390. Написать формулу общего члена для каждого ряда:

1) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$,

2) $\frac{2}{5} - \frac{4}{8} + \frac{6}{11} - \frac{8}{14} + \ldots$

Решение. 1) Знаменатели членов данного ряда — квадраты натуральных чисел, следовательно, общий член ряда

$$a_n = \frac{1}{n^2}.$$

2) Числители членов этого ряда — четные числа вида $2n$, а знаменатели — числа, получающиеся по формуле $3n + 2$ ($n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$). Учитывая также, что знаки членов ряда чередуются, получим

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{2n}{3n+2}.$$

1391. Найти для каждого ряда частичную сумму первых n членов (S_n); показать, пользуясь определением, сходимость (расходимость) ряда; найти сумму ряда (S):

1) $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$;

2) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

Решение. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $|q| < 1$, тогда частичная сумма S_n определяется по известной формуле суммы убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{a - lq}{1 - q},$$

где a — первый член; l — последний; q — знаменатель прогрессии. Следовательно, частичная сумма ряда

$$S_n = \frac{a - aq^{n-1}q}{1-q} = \frac{a - aq^n}{1-q}.$$

Сумма ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q},$$

так как под знаком предела первое слагаемое постоянное, а второе — бесконечно малая величина ($q_n \to 0$ при $n \to \infty$). Ряд сходится.

Если $|q| > 1$, то частичную сумму S_n найдем по формуле суммы возрастающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Следовательно, частичная сумма данного ряда

$$S_n = \frac{aq^n - a}{q - 1}.$$

Сумма ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}\right) = \infty,$$

так как первое слагаемое под знаком предела — бесконечно большая величина ($q^n \to \infty$ при $n \to +\infty$). Ряд расходится.

Если $q = 1$, то $S_n = a + a + \ldots + a = na$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} an = \infty$. Ряд расходится.

Если $q = -1$, то $S_1 = a$, $S_2 = a - a = 0$, $S_3 = a - a + a = a$, $S_4 = 0$, $S_5 = a$, ..., откуда видно, что последовательность частичных сумм предела не имеет, следовательно, ряд 1 расходится.

Итак, данный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

2) Общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ запишем иначе:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Определяя коэффициенты A и B, получаем

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Напишем частичную сумму ряда

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

отсюда следует, что ряд 2 сходится и его сумма $S = 1$.

1392. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5n-3}=\frac{3}{2}+\frac{5}{7}+\frac{7}{12}+\ldots+\frac{2n+1}{5n-3}+\ldots$

Решение. 1) Данный ряд называется *гармоническим*. Необходимое условие сходимости для этого ряда выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

тем не менее гармонический ряд расходится. Убедимся в этом. Найдем последовательность частичных сумм:

$$S_1=1,\ S_2=1+\frac{1}{2}=3\cdot\frac{1}{2},$$

$$S_4=S_2{}^2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=4\cdot\frac{1}{2},$$

$$S_8=S_2{}^3>4\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=5\cdot\frac{1}{2},$$

. . . . . .

$S_2{}^n\geqslant(n+2)\cdot\frac{1}{2}$ $(n=1,2,\ldots)$, следовательно, $S_2{}^n\to\infty$ при $n\to\infty$, так как $\frac{1}{2}(n+2)\to\infty$ при $n\to\infty$.

Итак, гармонический ряд расходится.

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{5-\frac{3}{n}}=\frac{2}{5}.$$

Необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

1393. Исследовать сходимость ряда, пользуясь необходимым признаком и признаком сравнения:

1) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots;$ 2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots;$

3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots;$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};$

$$5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)5^n}=1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$$

Решение. 1) Общий член данного ряда $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n\to\infty$ стремится к нулю, т. е. необходимый признак сходимости выполняется. Сравним ряд 1 с гармоническим рядом, общий член которого $a_n=\frac{1}{n}$. Нетрудно видеть, что $\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$), т. е. каждый член данного ряда больше соответствующего члена расходящегося гармонического ряда или равен ему. Следовательно, по признаку сравнения ряд 1 расходится.

2) Общий член данного ряда $a_n=\frac{n}{n+1}$ не стремится к нулю при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Необходимый признак сходимости не выполняется. Ряд 2 расходится.

3) Сравним данный ряд с гармоническим. Для всех $n\geqslant 2$ выполняется неравенство $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, следовательно, ряд 3 расходится.

4) Сравним данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

со сходящимся рядом 2 (задача 1391).

Как видно, каждый член данного ряда, начиная со второго, меньше соответствующего члена сходящегося ряда, т. е.

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}\ (n=1, 2, 3, \ldots),$$

поэтому ряд 4 сходится.

5) Сравним данный ряд с бесконечной геометрической прогрессией, общий член которой $a_n=\frac{1}{5^n}\left(q=\frac{1}{5}<1\right)$. Для всех n выполняется неравенство $\frac{1}{(n+1)5^n}<\frac{1}{5^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ сходится, поэтому, согласно признаку сравнения, и ряд 5 также сходится.

1394. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Решение. 1) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, следующий за ним член ряда $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Последующий член ряда делим на предыдущий и переходим к пределу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Получили $l = 0$ $(l < 1)$, следовательно, ряд 1 сходится.

2) $a_n = \frac{3^n}{n2^n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}$.

Разделив последующий член на предыдущий, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} n 2^n}{(n+1)\,2^{n+1} 3^n} = \frac{3n}{2(n+1)}.$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2(n+1)} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Получили $l = 1{,}5$ $(l > 1)$, следовательно, ряд 2 расходится.

3) $a_n = \frac{1}{n^3}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3}$.

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = 1.$$

Получили $l = 1$, следовательно, вопрос о сходимости ряда остается открытым. Применим признак сравнения. Данный ряд с общим членом $a_n = \frac{1}{n^3}$ сравним со сходящимся рядом 4 с общим членом $a_n = \frac{1}{n^2}$ (задача 1393).

Легко видеть, что

$$\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, ряд 3 сходится.

1395. Исследовать по признаку Коши сходимость ряда:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n};\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$$

Решение. 1) Общий член данного ряда $a_n=\frac{1}{n^n}$. Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Получили $l=0$ $(l<1)$, следовательно, ряд 1 сходится.

2) Общий член данного ряда $a_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Получили $l=\frac{1}{2}$ $(l<1)$, следовательно, ряд 2 сходится.

1396. Написать четыре первых члена ряда по данному общему члену:

1) $a_n=\frac{n^2}{(n+1)!}$; 2) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$;

3) $a_n=\frac{2n-1}{2n}$; 4) $a_n=(-1)^n\frac{n}{3^n}$.

1397. Написать пять первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

1398. Написать формулу общего члена для каждого ряда:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$; 2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$;

3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$; 4) $1-1+1-1+\ldots$;

5) $\frac{1}{1\cdot7}+\frac{1}{3\cdot9}+\frac{1}{5\cdot11}+\frac{1}{7\cdot13}+\ldots$

Для каждого ряда найти частичную сумму первых n членов (S_n); показать, пользуясь определением, сходимость (расходимость) ряда; если ряд сходится, то найти сумму ряда (S):

1399. $1+1+1+1+\ldots$

1400. $1+2+3+4+\ldots$

1401. $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots$

1402. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

1403. $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots$

Исследовать сходимость ряда, пользуясь необходимым признаком и признаком сравнения:

1404. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^3}$.

1405. $1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\ldots$

1406. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$.

1407. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

1408. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

1409. $1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 3^3}+\ldots$

Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

1410. $\frac{1\cdot 2}{7}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{7^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{7^3}+\ldots$

1411. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\ldots$

1412. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n2^n}}$.

1413. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}+\ldots$

Исследовать по признаку Коши сходимость ряда:

1414. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(1+n)}$.

1415. $1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots$

1416. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots$

Исследовать сходимость ряда:

1417. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

1418. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$

1419. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\ldots$

1420. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

1421. $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\ldots$

1422. $1+\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\ldots+\frac{1}{100n+1}+\ldots$

1423. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{8}+\ldots$

1424. $\sin 1+\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{9}+\sin\frac{1}{16}+\ldots$

1425. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\ldots$

1426. $\frac{1}{2}+\frac{3}{7}+\left(\frac{5}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots+\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\ldots$

§ 2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница

1. Если члены числового ряда с разными знаками (ряд содержит положительные и отрицательные члены), то такой ряд будем называть *знакопеременным.*

Знакопеременный ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots \qquad (2)$$

Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Если же ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно сходящимся.*

Признаки абсолютной сходимости знакопеременного ряда те же, что и сходимости ряда с положительными членами.

2. Ряд

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots \qquad (3)$$

или

$$-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^n a_n+\ldots, \qquad (3')$$

где $a_n>0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ называется *знакочередующимся.* Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

3. *Признак Лейбница.* Если члены знакочередующегося ряда (3) убывают по абсолютной величине

$$a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots$$

и

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

то такой ряд сходится и сумма его $0 < S < a_1$.

Пользуясь этим неравенством, можно оценить остаток ряда (3), который тоже является знакочередующимся рядом. Напишем остаток в таком виде:

$$r_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots).$$

Тогда сумма ряда в скобках будет положительная и меньше a_{n+1}. Следовательно, в любом случае остаток знакочередующегося сходящегося ряда имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине, т. е. $|r_n| < a_{n+1}$, где a_{n+1} абсолютная величина первого члена остатка r_n. Этой оценкой будем пользоваться в приближенных вычислениях с помощью рядов.

1427. Исследовать сходимость знакопеременного ряда:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$;

2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$;

3) $\frac{\sin\alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots$ (α — любое целое число);

4) $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n} + \ldots$

Решение. 1) Члены данного ряда убывают по абсолютной величине, знаки чередуются и общий член с возрастанием n стремится к нулю. Поэтому, согласно признаку Лейбница, ряд 1 сходится. Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

есть гармонический ряд, который, как нам уже известно, расходится. Следовательно, ряд 1 сходится условно (неабсолютно).

2) Члены данного ряда убывают по абсолютной величине, знаки чередуются и предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$. Поэтому ряд 2 сходится.

Составим ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots \qquad \text{(а)}$$

и сравним его с расходящимся рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} + \ldots \qquad \text{(б)}$$

Каждый член ряда (а) больше соответствующего члена ряда (б), следовательно, ряд (а) расходится, поэтому данный ряд 2 сходится условно.

3) Составим ряд из абсолютных величин данного знакопеременного ряда

$$\frac{|\sin\alpha|}{1}+\frac{|\sin 2\alpha|}{2^2}+\frac{|\sin 3\alpha|}{3^2}+\ldots+\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}+\ldots \qquad (в)$$

Сравним ряд (в) со сходящимся рядом

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \qquad (г)$$

Каждый член ряда (в) не превосходит соответствующего члена ряда (г), поэтому, согласно признаку сравнения, ряд (в) сходится. Следовательно, данный ряд 3 сходится абсолютно (безусловно).

4) Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, однако общий член не стремится к нулю с возрастанием n, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, т. е. необходимое условие сходимости ряда не выполнено, поэтому ряд расходится.

1428. Дан сходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда: 1) суммой первых его трех членов; 2) суммой первых его четырех членов.

Решение. 1) $S=S_n+r_n$, где S — сумма ряда; S_n — частичная сумма; r_n — остаток ряда. Находим $S=S_3+r_3$ или $S=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+r_3$, откуда $S=\frac{31}{36}+r_3$. По теореме Лейбница абсолютная погрешность $|r_n|<|a_{n+1}|$, следовательно, $|r_3|<|a_4|$, т. е. $|r_3|<\left|-\frac{1}{4^2}\right|$, откуда $|r_3|<\frac{1}{16}=0{,}0625$. Из данного ряда видно, что $r_3<0$, следовательно, $-0{,}0625<r_3<0$. Таким образом, сумма ряда $S\approx\frac{31}{36}$ с избытком.

2) Аналогично $S=S_4+r_4$ или $S=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+r_4$, откуда $S=\frac{115}{144}+r_4$, $|r_4|<|a_5|$, т. е. $|r_4|<\frac{1}{5^2}=0{,}04$ $(r_4>0)$, следовательно, $0<r_4<0{,}04$. Таким образом, сумма ряда $S\approx\frac{115}{144}$ с недостатком.

1429. Проверить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится. Сколько нужно взять членов этого ряда, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

Решение. Для данного ряда все условия признака Лейбница выполнены, поэтому ряд сходится. Напишем сумму ряда в таком виде: $S = S_n + r_n$, $|r_n| < |a_{n+1}|$. Найдем такое n, чтобы $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 0{,}01$. Решив уравнение $\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0{,}01$, получим $n = 9999$, следовательно, $|r_{9999}| < 0{,}01$. Учитывая условия задачи и этот результат, находим $0 < r_{9999} < 0{,}01$. Таким образом, $S = S_{9999} + r_{9999}$, откуда $S \approx S_{9999}$ с точностью до 0,01 (с недостатком). Заметим, что данный ряд сходится очень медленно, как и все другие условно сходящиеся ряды.

1430. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{(2n+1)5^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

Решение. Данный знакочередующийся ряд сходится:

$$a_1 = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}, \quad a_2 = -\frac{2}{5 \cdot 5^2} = -\frac{2}{125}, \quad a_3 = \frac{3}{7 \cdot 5^3} = \frac{3}{875} < 0{,}01.$$

Следовательно, надо взять два члена:

$$S = S_2 + r_2, \quad S \approx S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{15} - \frac{2}{125} = \frac{19}{375}$$

с точностью до 0,01 (с недостатком, так как $r_2 > 0$).

Исследовать сходимость следующих знакопеременных рядов:

1431. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. **1432.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$.

1433. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$ (найти сумму этого ряда).

1434. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \ldots$ **1435.** $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

1436. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{n^2}}{n^n}$. **1437.** $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \ldots$

1438. $\frac{\sin \alpha}{\ln 5} + \frac{\sin 2\alpha}{(\ln 5)^2} + \frac{\sin 3\alpha}{(\ln 5)^3} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{(\ln 5)^n} + \ldots$

1439. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой первых его четырех членов, суммой первых его пяти членов.

1440. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой первых его трех членов, суммой первых его шести членов.

1441. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01? до 0,001?

1442. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

§ 3. Степенные ряды. Интервал сходимости степенного ряда. Радиус сходимости

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots; \qquad (1)$$

числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* ряда. Общий член степенного ряда будем обозначать

$$u_n(x) = a_n x^n.$$

Число R называется *радиусом сходимости* ряда (1), если при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится.

Радиус сходимости R можно найти по признаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ (x от n не зависит), отсюда следует

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (2)$$

Следовательно, ряд (1) сходится при любых x, удовлетворяющих условию (2), и расходится при $|x| > \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Отсюда следует, что

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (a_n \neq 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (3)$$

и ряд (1) сходится при $|x| < R$ или в интервале $-R < x < R$, который называется *интервалом сходимости*. Если предел (3) равен ∞ ($R = \infty$), то ряд (1) сходится абсолютно на всей

числовой оси, т. е. в интервале $(-\infty, +\infty)$. Если предел (3) равен нулю ($R = 0$), то ряд (1) сходится в единственной точке $x = 0$. На концах интервала ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может расходиться. Сходимость ряда при $x = R$ и $x = -R$ надо исследовать по какому-либо признаку сходимости.

Рассматривают степенные ряды и более общего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \quad (4)$$

Если в ряду (4) положить $x_0 = 0$, то получим ряд (1), следовательно, ряд (1) есть частный случай ряда (4). Ряд (4) легко приводится к ряду (1) с помощью замены переменной $x - x_0 = y$. В полученном ряду $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots$ найдем по формуле (3) радиус сходимости R. Тогда $-R < y < R$ или $-R < x - x_0 < R$, откуда $x_0 - R < x < x_0 + R$. Из последнего двойного неравенства видно, что центром интервала сходимости ряда (4) служит точка x_0.

1443. Найти область сходимости ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n = 1!\, x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \ldots + n!\, x^n + \ldots;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} + \ldots;$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x - 1)^n = 1 + 2(x - 1) + 2^2 (x - 1)^2 + \ldots + 2^n (x - 1)^n + \ldots;$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}.$

Решение. 1) $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. По формуле (3)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\,(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = \lim_{n\to\infty} (n +$$

$+1)=\infty$. Следовательно, интервал сходимости $(-\infty, +\infty)$, т. е. данный ряд сходится на всей числовой оси.

2) $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Ряд сходится только в одной точке $x = 0$.

3) $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2}$. По формуле (3)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{1} = 1.$$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала $(-1, 1)$. Подставляя значение $x=1$ в ряд (3), получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$, который сходится абсолютно. Подставив $x = -1$, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n^2},$$

который также сходится абсолютно. Следовательно, областью сходимости данного ряда будет промежуток $[-1, 1]$.

4) Положив в данном ряду $x-1=y$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n y^n. \qquad \text{(a)}$$

Найдем радиус сходимости этого ряда:

$a_n = 2^n$, $a_{n+1} = 2^{n+1}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Исследуем поведение ряда на концах интервала $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Пусть $y = \frac{1}{2}$, тогда получим расходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$.

Пусть $y = -1$, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, который также расходится. Следовательно, ряд (а) сходится в интервале $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$. Заменив переменную y через переменную x, получим искомую область сходимости данного ряда:

$$-\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \text{ или } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

5) $a_n = \frac{1}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) = \lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) = e \cdot \infty = \infty.$

Следовательно, данный ряд сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Найти область сходимости ряда:

1444. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. **1445.** $x - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} - \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \ldots$

1446. $1 + \frac{2x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \ldots + \frac{(n+1)\,x^n}{n!} + \ldots$

1447. $1 + 10x + 10^2x^2 + 10^3x^3 + \ldots + 10^n x^n + \ldots$

1448. $\frac{x-2}{5} + \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 5^2} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 5^3} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n \cdot 5^n} + \ldots$

1449. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

1450. $1 + (x-3) + (x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4 + \ldots$

1451. $1 + 2x^2 + 4x^4 + \ldots + 2^{n-1}x^{2n-2} + \ldots$

1452. Найти интервал сходимости ряда

$$x + \frac{2^2}{2!} x^2 + \frac{3^3}{3!} x^3 + \ldots + \frac{n^n}{n!} x^n + \ldots$$

§ 4. Разложение функций в степенные ряды

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \quad (1)$$

где остаточный член $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ и $C = x_0 + (x - x_0)\,\Theta$ $(0 < \Theta < 1)$, т. е. C — среднее значение между x_0 и x.

Формула Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x), \quad (2)$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^n$ и $C = \Theta x$, т. е. C — среднее значение между 0 и x.

Если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в окрестности точки x_0 и

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \tag{3}$$

то из формулы (1) получается ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \tag{1'}$$

сходящийся к $f(x)$ при тех значениях x, при которых выполняется условие (3).

При $x_0 = 0$, будем иметь ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{2'}$$

как частный случай ряда Тейлора.

Ряд (2') напишем иначе:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \text{ или } f(x) - S_n(x) = r_n(x). \tag{a}$$

Пусть радиус сходимости $R > 0$ ряда (2') и условие (3) выполняется в интервале $(-R, R)$, тогда из равенства (а) следует, что ряд (2') будет сходиться к функции $f(x)$ в этом интервале и, наоборот, если ряд (2') сходится к функции $f(x)$ в интервале $(-R, R)$, то выполняется условие (3) в этом интервале.

Пусть радиус сходимости ряда (1') $R > 0$. Для того чтобы ряд (1') сходился в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3) в этом интервале. Заметим, что условие (3) выполняется в некотором промежутке $[-a, a]$ для функции $f(x)$, если ее производные любого порядка ограничены по абсолютной величине одним и тем же числом в указанном промежутке. Этим предложением мы будем пользоваться при решении задач.

Если функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка, то для этой функции можно написать ряд Тейлора, который будет единственным для данной функции $f(x)$ при любом способе нахождения его, причем этот ряд может сходиться к функции $f(x)$, а также может сходиться, но не будет воспроизводить исходную функцию, либо расходиться. Ряд будет сходиться, как уже говорилось, к функции $f(x)$, если выполняется условие (3).

1453. Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

1) $(1 + x)^m$; 2) e^x; 3) $\sin x$; 4) $\cos x$; 5) $\ln(1 + x)$.

Решение. 1) Для нахождения ряда Маклорена вычисляем значения функции $f(x) = (1 + x)^m$ ($m \neq 0$, $m \neq n$, где n — натуральное число) и ее производных при $x = 0$:

$$f(x) = (1 + x)^m, \; f(0) = 1;$$
$$f'(x) = m(1 + x)^{m-1}, \; f'(0) = m;$$
$$f''(x) = m(m - 1)(1 + x)^{m-2}, \; f''(0) = m(m - 1);$$
$$f'''(x) = m(m - 1)(m - 2)(1 + x)^{m-3}, \; f'''(0) = m(m - 1)(m - 2).$$

Отсюда видно, что

$$f^{(n)}(x) = m(m - 1)\ldots[m - (n - 1)](1 + x)^{m-n},$$
$$f^{(n)}(0) = m(m - 1)\ldots[m - (n - 1)] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Подставив эти значения в ряд (2′), получим ряд Маклорена данной функции, называемый *биномиальным*:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \tag{4}$$

Найдем радиус сходимости этого ряда:

$$|a_n| = \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\right|;$$
$$|a_{n+1}| = \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}\right|;$$
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!\,m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = 1.$$

Следовательно, ряд сходится в интервале $(-1, 1)$. В граничных точках при $x = -1$ и $x = 1$ ряд может сходиться или расходиться в зависимости от показателя степени m. В теоретическом курсе доказывается, что ряд (4) при $|x| < 1$ сходится к функции $(1 + x)^m$, т. е. сумма его равна этой функции.

Заметим, что если m — натуральное число, то биномиальный ряд примет вид формулы бинома Ньютона.

2) Вычисляем значения функции и ее производных при $x = 0$:

$$f(x) = e^x, \; f(0) = 1;$$
$$f'(x) = e^x, \; f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = e^x, \; f''(0) = 1.$$

Очевидно, что

$$f^{(n)}(x) = e^x, \; f^{(n)}(0) = 1 \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Подставив эти значения в ряд (2′), получим ряд Маклорена данной функции

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots; \qquad (5)$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Ряд (5) сходится к функции e^x при любых значениях x, так как в любом промежутке $[-a, a]$ функция e^x и ее производные по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом, например числом e^a, следовательно, условие (3) выполнено.

3) $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$;
$f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$;
$f''(x) = -\sin x$, $f''(0) = 0$;
$f'''(x) = -\cos x$, $f'''(0) = -1$;
$f^{IV}(x) = \sin x$, $f^{IV}(0) = 0$.

Нетрудно заметить, что производные четного порядка $f^{(2n)}(0) = 0$, а производные нечетного порядка $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$. Подставляя эти значения в ряд (2′), получаем разложение синуса

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \qquad (6)$$

$R = \infty$, т. е. ряд сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$.

4) $f(x) = \cos x$, $f(0) = 1$;
$f'(x) = -\sin x$, $f'(0) = 0$;
$f''(x) = -\cos x$, $f''(0) = -1$;
$f'''(x) = \sin x$, $f'''(0) = 0$;
$f^{IV}(x) = \cos x$, $f^{IV}(0) = 1$.

Здесь замечаем, что $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ и $f^{(2n-1)}(0) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Следовательно,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots; \qquad (7)$$

$R = \infty$, т. е. ряд сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$.

В примерах 3 и 4 производные $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ данных функций $\sin x$ и $\cos x$ в любом промежутке ограничены по абсолютной величине, например числом, равным 1, отсюда условие (3) для этих функций выполнено.

5) $f(x) = \ln(x+1)$, $f(0) = \ln 1 = 0$;
$f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f'(0) = 1$;

$$f''(x) = -\frac{1!}{(x+1)^2},\ f''(0) = -1;$$
$$f'''(x) = \frac{2!}{(x+1)^3},\ f'''(0) = 2!;$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(x+1)^4},\ f^{(4)}(0) = -3!.$$

Отсюда видно, что

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n},\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Следовательно,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (8)$$

Радиус сходимости находим по формуле (3) § 3: $R = 1$. При $x = 1$ ряд (8) сходится как знакочередующийся ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница. Следовательно,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

При $x = -1$ ряд расходится. Стало быть, ряд сходится в промежутке $-1 < x \leqslant 1$. Можно показать, что в этом промежутке остаточный член $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. условие (3) выполнено.

1454. Разложить в ряд Тейлора функцию $\sin x$ при $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Находим значения функции и ее производных при $x = \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \sin x,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$f'(x) = \cos x,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$f''(x) = -\sin x,\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$f'''(x) = -\cos x,\ f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$f^{IV}(x) = \sin x,\ f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя эти значения в ряд (1′), получаем ряд Тейлора данной функции

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \ldots\right].$$

Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Сумма полученного ряда $S(x) = \sin x$, так как условие (3) для данной функции выполнено ($|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$).

1455. Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

1) xe^x; 2) 2^x; 3) e^{x^2};
4) e^{-x^2}; 5) $\sin^2 x$; 6) $\sin 2x$.

1456. Разложить e^x в ряд Тейлора при $x_0 = -2$.

1457. Разложить $\sqrt{x}$ в ряд по степеням $x - 1$.

1458. Разложить $\cos x$ в ряд по степеням $x - \frac{\pi}{4}$.

1459. Разложить $x^3 - 2x$ в ряд по степеням $x - 2$.

1460. Разложить x^3 в ряд по степеням $x + 1$.

1461. Разложить $\frac{1}{x}$ в ряд по степеням $x + 3$.

1462. Написать три первых члена, отличных от нуля, разложения функций в ряд Маклорена:

1) $e^{\sin x}$; 2) $e^x \cos x$; 3) $\sec x$.

1463. С помощью биномиального ряда получить разложения в ряд функций:

1) $\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; 3) $\sqrt[3]{1+x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

§ 5. Применение рядов к приближенным вычислениям

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать и интегрировать почленно, причем радиус сходимости ряда не изменится.

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилу сложения и умножения многочленов. При этом полученный новый ряд будет иметь промежуток сходимости, совпадающий с общей частью промежутков сходимости исходных рядов.

1464. Разложить $\ln\frac{1+x}{1-x}$ в ряд по степеням x.

Решение. $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.

Нам уже известно, что

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1).$$

Следовательно,

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \quad (-1 \leqslant x < 1).$$

Вычитая почленно из первого ряда второй, получаем

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right) \quad (-1 < x < 1).$$

1465. Разложить $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена.

Решение. Известно, что $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2}$.

Подынтегральную функцию разложим в ряд, воспользовавшись биномиальным рядом (4) § 4:

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

Интегрируя этот ряд внутри промежутка его сходимости $(-1, 1)$, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)\,dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

1466. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Данный интеграл, как уже говорилось выше, не выражается в конечном виде через элементарные функции. Тем не менее с помощью степенных рядов его можно вычислить с любой степенью точности.

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Воспользуемся уже известным рядом

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Заменив в этом ряде x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots,$$

отсюда

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \frac{x^9}{4!\,9} - \frac{x^{11}}{5!\,11} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\,5} - \frac{1}{3!\,7} + \frac{1}{4!\,9} - \frac{1}{5!\,11} + \ldots$$

Вычисляя члены этого ряда с точностью до 0,001, замечаем, что шестой член ряда по абсолютной величине меньше 0,001. Следовательно, для решения данной задачи, согласно признаку Лейбница, надо взять сумму первых пяти членов, что обеспечит требуемую точность:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}747.$$

1467. Вычислить $\sin 10°$ с точностью до 0,0001.

Решение. Воспользуемся рядом (6) § 4, выразив градусы в радианной мере:

$$\sin 10° = \sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \left(\frac{\pi}{18}\right)^3\frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{18}\right)^5\frac{1}{5!} - \dots;$$

$\frac{\pi}{18} < 0{,}2$, следовательно, третий член разложения

$$a_3 = \left(\frac{\pi}{18}\right)^5\cdot\frac{1}{5!} < \frac{(0{,}2)^5}{5!} = \frac{2^5}{5!\,10^5} = \frac{32}{5!\,10^5} < 0{,}00001.$$

Поэтому, если положим $\sin 10° \approx a_1 - a_2$, то погрешность, согласно признаку Лейбница, не превзойдет по абсолютной величине третьего члена a_3, т. е. будет меньше заданной. Вычисляя с точностью до четвертого десятичного знака, находим

$$a_1 = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}1745,\quad a_2 = \left(\frac{\pi}{18}\right)^3\frac{1}{3!} \approx 0{,}0009,$$

$$\sin 10° \approx 0{,}1745 - 0{,}0009 = 0{,}1736$$

(полученный результат сравните со значением $\sin 10°$ в таблицах Брадиса).

1468. Вычислить число e с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся рядом (5) § 4:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

При $x = 1$ получим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

или

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + r_n. \qquad \text{(а)}$$

Воспользовавшись формулой (?) § 4, оценим остаток числового ряда (а):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0 < \Theta < 1);$$

$$(f(x) = e^x,\ f^{(n+1)}(x) = e^x,\ f^{(n+1)}(\Theta x) = e^{\Theta x}).$$

При $x=1$, учитывая, что $2<e<3$ (см. гл. IV § 7), получим $r_n=\frac{e^{\Theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$. По условию задачи надо выбрать такое n, чтобы выполнялось неравенство

$$r_n<0{,}001 \text{ или } \frac{3}{(n+1)!}<0{,}001.$$

Нетрудно проверить, что если $n=6$, то

$$r_6=\frac{e^{\Theta}}{7!}<\frac{3}{7!}=\frac{1}{1680}<0{,}001.$$

Итак, $$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+r_6,$$

отсюда

$e\approx 2+0{,}5000+0{,}1667+0{,}0417+0{,}0083+0{,}0014=2{,}7181$ (вычисление произвели с одним лишним знаком). Окончательно получим $e\approx 2{,}718$ с точностью до 0,001.

1469. Вычислить $\sqrt{1{,}004}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Воспользуемся формулой (4) § 4:

$$\sqrt{1{,}004}=\sqrt{1+0{,}004}=(1+0{,}004)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $m=\frac{1}{2}$, $x=0{,}004$;

$$\sqrt{1{,}004}=1+\frac{0{,}004}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(0{,}004)^2+\ldots=$$

$$=1+0{,}002-\frac{(0{,}004)^2}{2!\,4}+\ldots$$

Заметим, что знаки полученного ряда, начиная со второго, чередуются.

Ограничившись суммой первых двух членов, получим

$$\sqrt{1{,}004}\approx 1{,}002.$$

Оценим абсолютную погрешность

$$\Delta<\frac{(0{,}004)^2}{2!\,4}=0{,}000002.$$

Следовательно, значение корня найдено с заданной точностью.

1470. Вычислить $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 0,001.

Решение. $\sqrt[3]{30}=3\sqrt[3]{\frac{30}{27}}=3\sqrt[3]{1+\frac{3}{27}}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Здесь

$$m=\frac{1}{3},\quad x=\frac{1}{9};$$

$$\sqrt[3]{30} = 3\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{9}\right)^2\frac{1}{2!} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{9}\right)^3\frac{1}{3!} + \ldots\right] =$$
$$= 3\left(1 + \frac{1}{27} - \frac{2}{2!\,9^3} + \frac{2\cdot 5}{3!\,3^3 9^3} - \ldots\right).$$

Получили знакочередующийся ряд (после первого члена), поэтому если отбросим все члены, начиная с четвертого, то абсолютная погрешность

$$\Delta < \frac{3\cdot 2\cdot 5}{3!\,3^3 9^3} = \frac{5}{3^3\cdot 9^3} = \frac{5}{19\,683} < 0{,}001,$$

отсюда

$$\sqrt[3]{30} \approx 3 + \frac{3}{27} - \frac{6}{2!\,9^3} \approx 3 + 0{,}1111 - 0{,}0041 = 3{,}1070$$

(вычисление произвели с одним лишним знаком).

Итак, $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}107$ с точностью до 0,001.

1471. Разложить $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ в ряд Маклорена.

1472. Разложить $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ в ряд по степеням x.

1473. Почленным интегрированием ряда функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ написать ряд Маклорена для $\arcsin x$.

1474. Разложить $x\cos 2x$ в ряд по степени x.

1475. Пользуясь разложением $\operatorname{arctg} x$ в ряд по степеням x, вычислить число π с точностью до 0,01 (см. задачу 1465, положив $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$).

1476. Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,0001:

1) $\frac{1}{e}$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $\cos 10°$; 4) $\cos 18°$;

5) $\sin 18°$; 6) $\sin 0{,}3$; 7) $\sin 1$; 8) $\cos 0{,}4$.

1477. Пользуясь биномиальным рядом, вычислить с точностью до 0,001:

1) $\sqrt[3]{1{,}006}$; 2) $\sqrt[5]{1{,}25}$; 3) $\sqrt{404}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{102}}$; 5) $\sqrt[3]{70}$.

1478. С помощью биномиального ряда (взяв сумму первых двух членов разложения) найти:

1) $\sqrt{0{,}992}$; 2) $\sqrt[5]{30}$; 3) $\sqrt[3]{7}$.

1479. Воспользовавшись разложением функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена, вычислить с точностью до 0,0001:

1) $\ln 1{,}02$; 2) $\ln 1{,}06$.

1480. Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,0001 следующие интегралы:

1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$;

2) $\int_0^{0,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

3) $\int_0^{0,5} xe^{-x}\,dx$;

4) $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3}\,dx$.

Часть третья. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава XII. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

§ 1. События. Действия над событиями

То, что при наличии некоторого комплекса условий S может произойти или не произойти, называется *случайным событием*.

То, что при реализации данного комплекса условий S никогда не наступит (наступит всегда), называется *невозможным событием (достоверным событием)*.

В дальнейшем случайные события будем обозначать буквами A, B, C, ... , достоверные — U, а невозможные — V.

Суммой событий A и B называется такое событие, которое состоится при появлении или события A, или события B, или обоих событий вместе. Сумму событий обозначают символом $A+B$.

Произведением событий A и B называют событие, которое происходит при одновременном наступлении обоих событий. Его обозначают символом AB.

Аналогично определяются сумма и произведение бо́льшего числа событий.

Событие, которое состоится, если событие A произойдет, а событие B не произойдет, называется *разностью событий* A и B и обозначается символом $A-B$.

Если при каждой реализации комплекса условий S, когда происходит событие A, происходит и событие B, то мы будем говорить, что A влечет за собой B, и обозначать этот факт символом $A \subset B$ или $B \supset A$.

Если имеет место одновременно и $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называются *равносильными*. В этом случае пишут $A = B$.

События A и B называются *несовместимыми*, если их совместное наступление невозможно, т. е. если $AB = V$.

Два несовместимых события A и B называются *противоположными*, если при всякой реализации комплекса условий S,

одно из них обязательно происходит; иначе A и B будут противоположными событиями, если для них одновременно выполняются два соотношения:

$$AB = V \text{ и } A + B = U.$$

В этом случае пишут: $B = \overline{A}$. Очевидно, $\overline{\overline{A}} = A$.

1481. Взятая наудачу деталь может оказаться либо первого (событие A), либо второго (событие B), либо третьего (событие C) сорта. Что представляют собой следующие события: $A + B$; $\overline{A + C}$; AC; $AB + C$?

Решение. $A + B$ — это событие, которое состоится при наступлении хотя бы одного из событий A и B. Следовательно, $A + B$ в нашем случае — деталь первого или второго сорта. Так как $A + C$ — деталь первого или третьего сорта, то противоположное этому событие $\overline{A + C}$ — деталь второго сорта. AC — невозможное событие, поскольку деталь одновременно не может быть и первого и третьего сорта. $AB + C$ как сумма невозможного события и события C равно C, т. е. $AB + C$ — деталь третьего сорта.

1482. Доказать, что $\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}$.

Доказательство. Если произошло событие $\overline{A + B}$, то это означает, что ни одно из событий A и B не наступило, т. е. произошло событие $\overline{A}\overline{B}$. Отсюда $\overline{A + B} \subset \overline{A}\overline{B}$. Пусть теперь наступило событие $\overline{A}\overline{B}$, т. е. ни одно из событий A и B не произошло. Это означает, что осуществилось событие, противоположное $A + B$. Поэтому всегда $\overline{A}\overline{B} \subset \overline{A + B}$. Одновременное выполнение доказанных соотношений и означает, что всегда $\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}$.

Докажите более общее соотношение:

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n.$$

1483. В урне 5 красных, 2 синих и 3 белых шара. Все они пронумерованы цифрами 1,2, ..., 10. Из урны берется наудачу 1 шар. Событие — шар с четным номером — обозначим через A, с номером, кратным 3, — через B, шар красного цвета — через C, синего — через D и, наконец, белого — через E. Что представляют собой следующие события: $A + B$, $C + E$, AD, $\overline{A - B}$, $B\overline{E}$, $\overline{AD} - E$?

1484. Доказать равенства:

1) $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$;
2) $A + AB = A$;
3) $A + B = (A - B) + (B - A) + AB$;
4) $(A + B) - B = A - B$;

5) $(A-B)+B=A+B$;
6) $(A+B)C=AC+BC$;
7) $(A+C)(B+C)=AB+C$.

1485. При каких условиях справедливы следующие соотношения:

1) $A+B=AB$;
2) $(A+B)-B=A$;
3) $A+\bar{A}=A$;
4) $A\cdot\bar{A}=A$?

1486. Установить, какие из следующих соотношений правильны:

1) $\overline{ABC}\subset AB+BC+CA$;
2) $\bar{A}+\bar{B}=\overline{A+B}$;
3) $\overline{A+B+C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;
4) $\overline{A+B+C}=\bar{A}\overline{BC}$.

1487. Упростить следующие выражения:

1) $(A+B)(A+\bar{B})$;
2) $(A+B)(B+C)(C+A)$;
3) $A+(B-AB)+(C-AC)$;
4) $(A+B)B+A(AB)$.

1488. Пусть A, B, C — три произвольных события. Найти выражения для событий, которые состоятся в следующих случаях: 1) произошло только событие A; 2) произошло одно и только одно событие; 3) произошло два и только два события; 4) все три события произошли; 5) произошло по крайней мере одно событие; 6) произошло не более двух событий.

§ 2. Определение частости и вероятности события

Пусть комплекс условий S воспроизводится n раз, причем событие A наступает m раз. Тогда *частостью события* A при этих испытаниях называется число $w_n(A)=\frac{m}{n}$.

Оказывается, что при $n\to\infty$ частость $\frac{m}{n}$ колеблется около некоторой постоянной $P(A)$, называемой *вероятностью события* A. Следовательно, частость можно рассматривать как приближенное значение вероятности: $P(A)\approx\frac{m}{n}$.

Если $A=A_1+A_2+\ldots+A_m$, где A_1, A_2, $\ldots$, A_m — попарно несовместимые события ($A_iA_j=V$ при $i\neq j$), то говорят, что событие A распадается на m частных случаев.

События A_1, A_2, $\ldots$, A_m называются *равновозможными*, если при создании комплекса условий S каждое из них имеет одинаковую возможность наступить.

Пусть достоверное событие U распадается на n равновозможных случаев $A_1, A_2, \ldots, A_n\left(U=\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$, сумма m из которых дает событие A. Тогда отношение числа случаев, благоприятствующих наступлению события A (m), к числу всех равновозможных случаев (n) равно вероятности события A: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Из определения вероятности события следует, что:
1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; 2) $P(U)=1$; 3) $P(V)=0$.

1489. Из 5000 взятых наудачу деталей оказалось 32 бракованные. Найти частость бракованных деталей в данной партии.

Решение. В этой задаче нас интересует событие A — появление бракованной детали. Произведено $n=5000$ испытаний, причем событие A наступило $m=32$ раза. Поэтому искомая частость

$$w_{5000}(A)=\frac{32}{5000}=0{,}0064.$$

1490. Французский естествоиспытатель XVIII в. Бюффон при экспериментальной проверке закона больших чисел бросил монету 4040 раз, в результате чего герб выпал 2048 раз. Найти частость выпадения герба.

1491. Произведя 100 выстрелов, стрелок попал в цель 89 раз. Чему равна частость попадания в цель данного стрелка?

1492. Среди 1000 новорожденных оказалось 517 мальчиков. Найти частость рождения мальчиков.

1493. Среди 4000 первых чисел натурального ряда имеется 551 простое число. Найти частость появления простого числа.

1494. В книге В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения» 1964 г. издания 500 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 7?

Решение. Из условия задачи следует, что в данном случае достоверное событие распадается на $n=500$ равновозможных случаев. Из них благоприятствуют наступлению интересующего нас события $m=71$ случай, так как номер, кратный 7, имеет вид $7k$, где k — целое число, и $0<7k \leqslant 500$ $\left(k \leqslant \frac{500}{7}=71\frac{3}{7}\right)$. Поэтому искомая вероятность

$$p=\frac{71}{500}=0{,}142.$$

1495. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Как велика вероятность, что в нем: 1) все цифры различные; 2) все цифры нечетные?

Решение. 1) Так как на каждом из пяти мест в пятизначном номере может стоять любая из цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то всех различных пятизначных номеров будет 10^5 (все они могут быть перенумерованы следующим образом: номер 00 000 — 1-й, 00001 — 2-й, 00002 — 3-й, ..., 99 998 — 99 999-й и, наконец, 99 999 — 100 000-й). Номера, у которых все цифры различные, — это размещения из 10 элементов по 5. Поэтому число благоприятствующих случаев $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ и искомая вероятность

$$p = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0{,}3024.$$

2) Из 5 нечетных цифр (1, 3, 5, 7, 9) можно образовать 5^5 различных пятизначных номеров. 5^5 — это число благоприятствующих случаев. Так как всех равновозможных случаев 10^5, то искомая вероятность

$$p = \frac{5^5}{10^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

1496. В купе железнодорожного вагона один против другого стоят два дивана, на каждом из которых по пять мест. Из десяти пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, а трое — спиной к нему. Чему равна вероятность того, что данные два пассажира из числа трех, которым безразлично, где сидеть, окажутся рядом?

Решение. Сначала находим число всех возможных размещений пассажиров в вагоне с учетом тех ограничений, которые высказаны в задаче (четыре пассажира желают сидеть лицом к паровозу, а трое — на противоположном диване). Пусть A, B, C — пассажиры, которым безразлично, где сидеть. Если A сядет лицом к паровозу, то на диване вместе с ним еще четыре пассажира могут сесть 5! способами (перестановки из пяти элементов). Остальные пассажиры на противоположном диване также могут сесть 5! способами. Отсюда, если A выбрал первый диван, то все пассажиры могут сесть $(5!)^2$ способами. Такое же число способов мы получим, если на первом диване будет не A, а B или C.

Итак, число всех равновозможных случаев, на которое распадается достоверное событие, равно $3(5!)^2$.

Благоприятствовать наступлению интересующего нас события будут случаи, когда данные два пассажира, например B и C, будут сидеть рядом. Это возможно только, если B и C сидят спиной к паровозу. Таких случаев будет $5! \cdot 3! \cdot 2 \cdot 4$, поэтому искомая вероятность

$$p = \frac{5! \cdot 3! \cdot 2 \cdot 4}{3(5!)^2} = \frac{2}{15}.$$

1497. В урне 12 шаров, ничем, кроме цвета, не отличающихся. Среди этих шаров 5 черных и 7 белых. Какова вероятность, что наудачу вынутый шар окажется черным?

1498. В урне 3 белых, 2 черных и 5 красных шаров. Чему равна вероятность того, что наугад вынутый шар окажется: 1) красным; 2) не черным?

1499. Считая выпадение любой из граней игральной кости одинаково вероятным, найти вероятность выпадения грани с четным числом очков.

1500. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что произведение выпавших очков окажется равным 5?

1501. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 2?

1502. Какова вероятность, что в январе наудачу взятого года окажется 4 воскресенья?

1503. На 6 одинаковых карточках написаны буквы А, В, К, М, О, С. Карточки перемешивают и раскладывают наугад в ряд. Какова вероятность, что при этом получится слово МОСКВА?

1504. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из 3 человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран, найти вероятность того, что в делегацию войдут две женщины и один мужчина.

1505. Из партии, в которой 31 деталь без дефектов и 6 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность в следующих случаях: 1) все три детали без дефектов; 2) по крайней мере одна деталь без дефектов?

1506. На отдельных карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все 9 карточек тщательно перемешаны, после чего наугад берут 4 из них и раскладывают в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом: 1) четное число; 2) число 1234?

1507. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Как велика вероятность, что в нем все цифры, кратные 3?

1508. Из колоды в 36 карт наугад выбирают 3 карты. Какова вероятность того, что среди них окажется два туза?

1509. Колода из 36 карт разделена наудачу на две равные части. Найти вероятность того, что каждая из полуколод будет одной масти.

1510. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на шесть секторов, отмеченных цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, если диски занимают определенное положение относительно корпуса замка и, следовательно, цифры образуют определенную комби-

нацию, составляющую «секрет» замка. Какова вероятность открыть замок, установив произвольную комбинацию цифр?

1511. В партии из N изделий M бракованных. Наугад выбирают n изделий. Определить вероятность того, что среди этих n изделий будет m бракованных.

1512. Для проверки магазинов нужны три ревизора, каждый из которых должен проверить два магазина. Чему равна вероятность того, что при случайном распределении объектов первому ревизору попадут данные два магазина?

1513. Брошены n игральных костей. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков окажется не меньше $6n - 1$.

1514. Что более вероятно: выпадение хотя бы одной единицы при бросании четырех костей или выпадение хотя бы один раз двух единиц при 24 бросаниях двух костей?

1515. Чему равна вероятность того, что, разделив колоду из 36 карт пополам, в каждой пачке получим по два туза?

1516. Чему равна вероятность того, что в случайно взятой перестановке из n элементов данные элементы a и b не окажутся рядом?

1517. Из n изделий, среди которых r бракованных, наудачу берется r изделий. Какова вероятность, что все они бракованные?

1518. Общество из n человек садится за круглый стол. С какой вероятностью два определенных лица окажутся рядом?

1519. На каждую из n скамеек садится по m человек. Найти вероятность того, что два данных лица окажутся рядом.

1520. Общество из 10 человек садится на скамейку. Как велика вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

1521. Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 *ч*. Пришедший первый ждет второго в течение α *мин* ($\alpha < 60$), после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц A и B, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

1522. Коалиции A и B ведут войну между собой, n нейтральных государств находятся в нерешительности, причем известно, что k из них, наверно, не присоединятся к коалиции A, а m — к коалиции B. Чему равна вероятность отдельной возможной ситуации в этой войне, если считать их равновозможными?

§ 3. Теорема сложения вероятностей

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместимые, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей, т. е.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

В общем случае

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,\ j \\ i<j}} P(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,\ j,\ k \\ i<j<k}} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right).$$

1523. Мастер обслуживает 5 станков. 20% рабочего времени он проводит у первого станка, 10 — у второго, 15 — у третьего, 25 — у четвертого и, наконец, 30 — у пятого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени он находится: 1) у первого или третьего станка; 2) у второго или пятого; 3) у первого или четвертого; 4) у первого или второго, или третьего; 5) у четвертого или пятого.

Решение. Введем обозначения. Пусть A, B, C, D, E — события, которые состоятся, если в наудачу выбранный момент времени мастер находится соответственно у первого, второго, третьего, четвертого и, наконец, у пятого станка. Из условия задачи следует, что A, B, C, D, E — попарно несовместимые события и $P(A) = 0{,}20$; $P(B) = 0{,}10$; $P(C) = 0{,}15$; $P(D) = 0{,}25$; $P(E) = 0{,}30$. 1) Событие, которое состоится, если мастер находится у первого или третьего станка, — это $A + C$. Надо найти $P(A + C)$. По теореме сложения вероятностей

$$P(A + C) = P(A) + P(C) = 0{,}20 + 0{,}15 = 0{,}35.$$

2) $P(B + E) = P(B) + P(E) = 0{,}10 + 0{,}30 = 0{,}40.$

3) $P(A + D) = P(A) + P(D) = 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}45.$

4) $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}45.$

5) $P(D + E) = P(D) + P(E) = 0{,}25 + 0{,}30 = 0{,}55.$

1524. В ящике находятся катушки четырех цветов: белых катушек 50%, красных — 20, зеленых — 20, синих — 10. Какова вероятность того, что взятая наудачу катушка окажется зеленой или синей?

1525. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбьет 10 очков, равна 0,4, 9 очков — 0,3 и, наконец, 8 или меньше очков — 0,3. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее 9 очков.

1526. В магазин трикотажных изделий поступили капроновые чулки, 60% которых доставила первая фабрика, 25 — вторая и 15 — третья. Какова вероятность того, что купленные наугад чулки изготовлены на первой или третьей фабрике?

1527. При записи фамилий членов некоторого собрания, общее число которых 420, оказалось, что начальной буквой фамилии у 10 была А, у 6 — Е, у 9 — И, у 12 — О, у 5 — У,

у 3 — Ю, у всех прочих фамилия начиналась с согласной. Определить вероятность, что фамилия члена данного собрания начинается с гласной.

1528. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

1529. На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену мужчин окажется не менее 2.

1530. Данное предприятие в среднем дает 21% продукции высшего сорта и 70% продукции первого сорта. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта.

1531. Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Минске, 8 — в Гомеле и 7 — в Витебске. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

1532. 12 рабочих получили путевки в 4 дома отдыха: 3 — в первый, 3 — во второй, 2 — в третий и 4 — в четвертый. Чему равна вероятность того, что данные трое рабочих поедут в один дом отдыха?

1533. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение. Пусть A — событие, которое состоится, если наудачу взятое двузначное число кратно 2, а B — событие, которое состоится, если это число кратно 5. Надо найти $P(A+B)$. Так как A и B — события совместимые, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Двузначные числа — это 10, 11, ..., 98, 99. Всех их 90. Очевидно, 45 из них кратны 2 (благоприятствуют наступлению A), 18 кратны 5 (благоприятствуют наступлению B) и, наконец, 9 кратны и 2 и 5 одновременно (благоприятствуют наступлению AB). Поэтому

$$P(A)=\frac{45}{90}=0{,}5;\quad P(B)=\frac{18}{90}=0{,}2;\quad P(AB)=\frac{9}{90}=0{,}1$$

и, следовательно,

$$P(A+B)=0{,}5+0{,}2-0{,}1=0{,}6.$$

1534. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двузначных чисел от 11 до 40. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 3 или 2?

1535. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 5 очков?

§ 4. Теорема умножения вероятностей

Вероятность наступления события A при условии, что событие B уже произошло, называется *условной* и обозначается $P(A/B)$.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло, т. е.

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B).$$

Если $P(A/B) = P(A)$, то говорят, что событие A не зависит от события B. Свойство независимости событий взаимное: если $P(A/B) = P(A)$, то и $P(B/A) = P(B)$.

Для независимых событий A и B теорема умножения вероятностей записывается так: $P(AB) = P(A)\,P(B)$.

Пусть в результате создания комплекса условий S могут произойти следующие независимые события: $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Тогда вероятность того, что произойдет по крайней мере одно из этих событий, определяется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) = 1 - P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2)\ \ldots\ P(\bar{A}_m).$$

1536. В мастерской два мотора работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый мотор не потребует внимания мастера, равна 0,9, для второго мотора эта вероятность равна 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из моторов не потребует внимания мастера.

Решение. Пусть A — событие, которое состоится, если первый мотор не потребует к себе внимания в течение часа, а B — событие, которое состоится, если внимания не потребует второй мотор. Надо найти $P(AB)$. Так как A и B — независимые события, то $P(AB) = P(A)\,P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}765$.

1537. В урне 5 белых и 4 черных шара. Из нее вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Пусть A_1 — появление белого шара при первом вынимании, а A_2 — появление белого шара при втором вынимании. Нас интересует событие A_1A_2. По теореме умножения вероятностей

$$P(A_1A_2) = P(A_1)\,P(A_2/A_1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5-1}{9-1} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18} = 0{,}278.$$

1538. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6, для второго — 0,7 и для третьего — 0,75. Найти вероятность по крайней мере одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

Решение. Пусть A, B, C — события, состоящие в том, что соответственно в цель попал первый, второй, третий стрелок. Из условия задачи следует, что $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}7$,

$P(C) = 0{,}75$. Требуется найти вероятность по крайней мере одного попадания в цель, т. е. $P(A + B + C)$:

$$P(A + B + C) = 1 - P(\bar{A})\,P(\bar{B})\,P(\bar{C}) = 1 - (1 - 0{,}6)\,(1 - 0{,}7)\,(1 - 0{,}75) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}97.$$

1539. Показать, что если условная вероятность $P(A/B)$ больше безусловной $P(A)$, то и условная вероятность $P(B/A)$ больше безусловной $P(B)$.

1540. В денежно-вещевой лотерее на 1000 билетов приходится 24 денежных и 10 вещевых выигрышей. Некто приобрел два билета. Какова вероятность выигрыша: 1) хотя бы на один билет; 2) по первому билету денег, а по второму — вещей?

1541. В урне 20 белых и 6 черных шаров. Из нее вынимают наугад два шара подряд. Найти вероятность того, что оба шара черные.

1542. Те же условия, но после первого вынимания шар возвращают в урну и все шари перемешивают.

1543. В урне 5 белых и 3 черных шара. Найти вероятность того, что 3 наудачу вынутых шара окажутся белыми.

1544. Прибор, работающий в течение суток, состоит из 3 узлов, каждый из которых, независимо от других, может за это время выйти из строя. Неисправность хотя бы одного узла выводит прибор из строя целиком. Вероятность безотказной работы в течение суток первого узла равна 0,9, второго — 0,95, третьего — 0,85. Найти вероятность того, что в течение суток прибор будет работать безотказно.

1545. При изготовлении детали заготовка должна пройти 4 операции. Предполагая появление брака на отдельных операциях событием независимым, найти вероятность изготовления стандартной детали, если вероятность брака на первой операции равна 0,02, на второй — 0,01, на третьей — 0,02, на четвертой — 0,03.

1546. Сколько раз нужно подбросить две пятикопеечные монеты, чтобы с вероятностью не менее 0,99 можно было утверждать, что хотя бы один раз выпадут два герба?

1547. Два игрока поставили равные суммы денег и условились, что тот, кто раньше выиграет определенное число партий, получит всю сумму. По некоторым причинам игра была прекращена в момент, когда одному игроку не хватало до условленного числа только одной партии, другому — двух партий. Как должны игроки разделить между собою ставку?

1548. Вероятность улучшить свой предыдущий результат для данного спортсмена равна p. Найти вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

1549. В таблице логарифмов, содержащей 10 000 значений, есть одна опечатка. Берут наугад 100 чисел и отыскивают их логарифмы по таблице. Какова вероятность того, что среди найденных значений логарифмов хотя бы одно ошибочное?

1550. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места. Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечетная?

1551. Баллотируются два кандидата, причем за первого в урну опущено n бюллетеней, а за второго m ($n > m$). Какова вероятность того, что в ходе подсчета бюллетеней число подсчитанных голосов, поданных за первого, все время будет больше числа голосов, поданных за второго?

1552. Достигшему 60-летнего возраста вероятность умереть на 61-м году равна в определенных условиях 0,09. Какова в этих условиях вероятность, что из трех человек в возрасте 60 лет: 1) все трое будут живы через год; 2) по крайней мере один из них будет жив?

1553. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, из второго — 0,91. Найти вероятность поражения цели.

1554. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго — 0,8 и для третьего — 0,85. Найти вероятность при следующих условиях: 1) в течение некоторого часа ни один из станков не потребует внимания рабочего; 2) все станки потребуют внимания рабочего.

1555. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,7, для второго станка эта вероятность равна 0,8, для третьего — 0,9 и, наконец, для четвертого — 0,85. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа по крайней мере один станок потребует к себе внимания рабочего.

1556. Чему равна вероятность того, что при n подбрасываниях игральной кости выпадет хотя бы один раз единица?

§ 5. Формула полной вероятности

Пусть $B = \sum_{i=1}^{n} A_i B$, где $A_i A_j = V$ при $i \neq j$. Тогда имеет место следующая фомула полной вероятности:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B/A_i).$$

1557. Электролампы изготавливаются на 3 заводах. Первый завод производит 45% общего количества электроламп, второй — 40, третий — 15. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго — 80, третьего — 81. В магазины поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется стандартной?

Решение. Введем обозначения. Пусть событие A_1 — купленная лампа изготовлена на первом заводе, A_2 — лампа со второго завода, A_3 — лампа с третьего завода и, наконец, событие B — лампа оказалась стандартной. Из условия задачи следует, что $P(A_1)=0{,}45$, $P(A_2)=0{,}40$, $P(A_3)=0{,}15$; $P(B/A_1)=0{,}70$, $P(B/A_2)=0{,}80$, $P(B/A_3)=0{,}81$. Так как $B=A_1B+A_2B+A_3B$, то $P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)=0{,}45\cdot 0{,}70+0{,}40\cdot 0{,}80+0{,}15\cdot 0{,}81=0{,}7565$.

1558. На сборку попадают детали с 3 автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3% брака, второй — 0,2 и третий — 0,4. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго — 2000 и с третьего — 2500 деталей.

1559. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго — 0,03, для третьего — 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего в два раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

1560. По самолету производится 3 одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5, при втором — 0,6, при третьем — 0,8. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно 3 попаданий: при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3, при двух попаданиях — с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате 3 выстрелов самолет будет сбит.

1561. В 3 урнах находятся белые и черные шары: в первой — 2 белых и 3 черных, во второй — 2 белых и 2 черных, в третьей — 3 белых и 1 черный. Из первой урны переложили шар во вторую. После этого шар из второй урны переложили в третью. Наконец, из третьей урны его переложили в первую. Чему равна вероятность того, что состав шаров во всех урнах не изменится?

1562. В 3 урнах находятся белые и черные шары: в первой — 2 белых и 4 черных, во второй — 3 белых и 5 черных, в третьей — 4 белых и 6 черных. Из первой урны взяли наудачу два шара и переложили во вторую. После этого взяли 2 шара из второй урны и переложили в третью. Наконец, из

третьей урны в первую переложили 2 шара. Определить, чему равна вероятность того, что: 1) состав шаров во всех урнах не изменится? 2) состав шаров во всех урнах изменится?

1563. Литье в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% из первого и 30 из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго — 20. Найти вероятность того, что одна взятая наугад болванка без дефектов.

1564. Пусть имеется $N+1$ урн, каждая из которых содержит N шаров. Урна с номером k содержит k белых и $N-k$ черных шаров ($k=0, 1, 2, \ldots, N$). Из наудачу выбранной урны n раз наугад извлекают шары, причем вынутый шар каждый раз возвращают обратно. Чему равна вероятность того, что все шары белые?

§ 6. Формула Бейеса

Пусть событие B может произойти только при условии появления одного из несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B/A_j)}.$$

Эта формула носит название *формулы Бейеса.*

1565. Имеется 12 урн, из них в 6 урнах (состав A_1) по 3 белых и 4 черных шара, в 3 урнах (состав A_2) по 2 белых и 8 черных шаров, в 2 урнах (состав A_3) по 6 белых и 1 черному шару, в 1 урне (состав A_4) 4 белых и 3 черных шара. Из наугад выбранной урны взят шар. Чему равна вероятность того, что шар взят из урны состава A_3, если он оказался белым?

Решение. Введем обозначение. Пусть событие B — взятый шар оказался белым. Согласно условию, $P(A_1)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $P(A_3)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $P(A_4)=\frac{1}{12}$; $P(B/A_1)=\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$, $P(B/A_2)=\frac{2}{2+8}=\frac{1}{5}$, $P(B/A_3)=\frac{6}{6+1}=\frac{6}{7}$, $P(B/A_4)=\frac{4}{4+3}=\frac{4}{7}$. По формуле Бейеса находим искомую вероятность

$$P(A_3/B)=\frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)+P(A_4)P(B/A_4)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{7}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{7}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}}=0{,}314.$$

1566. На склад поступает продукция 3 фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй — 46 и третьей — 34. Известно также, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй — 2 и, наконец, для третьей — 1. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

1567. Имеется 10 одинаковых по виду урн, из которых в 9 находится по 2 черных и 2 белых шара, а в одной—5 белых и 1 черный шар. Из наугад взятой урны извлечен шар. Чему равна вероятность того, что этот шар взят из урны, содержащей 5 белых шаров, если он оказался белым?

1568. Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,2, а у второго — 0,6. В результате первого залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

1569. По линии связи передается кодированный с помощью букв A, B, C текст. Вероятности передачи отдельных букв таковы: $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$, $P(C) = 0{,}2$. Вероятности искажения при передаче отдельных букв равны соответственно: 0,01; 0,03; 0,02. Установлено, что сигнал из двух букв принят без искажений. Чему равна вероятность, что передавался сигнал AB?

1570. Некто, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог равны соответственно 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Чему равна вероятность того, что заблудившийся пошел по первой дороге, если известно, что он вышел из леса через час?

Глава XIII Схема повторных испытаний

§ 1. Формула Бернулли

Пусть комплекс условий S воспроизводится n раз, причем каждый раз событие A может наступить с одной и той же вероятностью p, независимо от результатов предыдущих опытов. Тогда вероятность того, что событие произойдет m раз при n испытаниях, определяется по формуле Бернулли

$$P_{mn} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$.

Чтобы нагляднее представить свойства ряда вероятностей P_{0n}, P_{1n}, ..., P_{mn}, ..., P_{nn}, строят полигон их распределения. Для этого берут прямоугольную систему координат и на оси абсцисс отмечают точки 0, 1, ..., m, ..., n. Из этих точек восстанавливают к оси абсцисс перпендикуляры, длины которых равны соответственно P_{0n}, P_{1n}, ..., P_{mn}, ..., P_{nn}. Фигура, ограниченная замкнутой ломаной, вершинами которой являются концы построенных перпендикуляров и точки $(-1; 0)$, $(n+1; 0)$, называется *полигоном биномиального распределения.*

1571. Обычную монету бросили 4 раза. Чему равна при этом вероятность выпадения герба два раза?

Решение. В данном случае A — выпадение герба при отдельном испытании; $p = P(A) = 0{,}5$ и, следовательно, $q = 1 - p = 0{,}5$. По формуле Бернулли находим вероятность

$$P_{2,4} = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}375.$$

1572. Пусть всхожесть семян ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдет 5?

Решение. Вероятность всхожести отдельного семени $p = 0{,}9$. Поэтому $q = 1 - p = 0{,}1$. По формуле Бернулли определим

$$P_{5,7} = C_7^5 p^5 q^{7-5} = C_7^{7-5} p^5 q^2 = C_7^2 \cdot (0{,}9)^5 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}124.$$

1573. Доказать, что при $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np = \lambda$ есть величина постоянная,

$$\lim_{n\to\infty} P_{mn} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

и, следовательно, при больших n и малых p (для редких явлений) имеет место приближенная формула:

$$P_{mn} = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$.

Доказательство. Так как $\lambda = np$, то $p = \frac{\lambda}{n}$ и

$$\lim_{n\to\infty} P_{mn} = \lim_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} = \lim_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left[1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\right] \lim_{n\to\infty} \left(1 -\right.$$

$$-\frac{\lambda}{n}\Big)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=\frac{\lambda^m}{m!}1\cdot e^{-\lambda}\cdot 1=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

что и требовалось доказать.

1574. Игральная кость подброшена 10 раз. Найти вероятность выпадения единицы 7 раз.

1575. 30% изделий данного предприятия — это продукция высшего сорта. Некто приобрел 6 изделий, изготовленных на этом предприятии. Чему равна вероятность, что 4 из них высшего сорта?

1576. Вероятность выигрыша по облигации займа за все время его действия равна 0,25. Какова вероятность того, что некто, приобретя 8 облигаций, выиграет по 6 из них?

1577. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Чему равна вероятность того, что, вынув наудачу с возвращением 14 шаров, получим белых не менее 12?

1578. Приняв вероятность рождения мальчика равной 0,515, найти вероятность того, что среди 10 новорожденных будет 4 девочки.

1579. В магазин вошли n покупателей. Найти вероятность того, что m из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого вошедшего одна и та же и равна p:

1) $n=8$, $p=0{,}3$, $m=3$;
2) $n=12$, $p=0{,}2$, $m=4$;
3) $n=9$, $p=0{,}4$, $m=5$;
4) $n=10$, $p=0{,}2$, $m=6$;
5) $n=11$, $p=0{,}1$, $m=7$.

1580. Из последовательности чисел 1, 2, ..., 99, 100 выбирают наугад с возвращением 10. Чему равна вероятность того, что среди них кратных 7 будет не более двух?

1581. В мастерской имеется 12 моторов. При существующем режиме работы вероятность того, что мотор в данный момент работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент не менее 10 моторов работают с полной нагрузкой.

1582. На одном предприятии работает 10 служащих. Эти служащие завтракают в одной из двух закусочных, причем выбор ими той или другой одинаково вероятен. Если заведующие закусочных хотят быть уверенными более чем на 95% в том, что у них достаточно мест, то сколько мест должно быть в каждой закусочной?

1583. Вероятность попадания снаряда в цель равна 0,3. Сколько должно быть произведено независимых выстрелов,

чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в цель была больше чем 0,9?

1584. Построить полигон биномиального распределения для случая, когда $n = 5$, $p = 0{,}6$.

1585. В цехе работает 4 станка, причем вероятность остановки в течение часа для каждого из них одна и та же и равна 0,8. Построить полигон распределения вероятности числа станков, остановившихся в течение данного часа.

§ 2. Наивероятнейшее число появлений события

Число наступлений события называется *наивероятнейшим*, если вероятность наступления события данное число раз в этой серии испытаний наибольшая по сравнению с вероятностями других исходов.

Пусть n — число независимых испытаний, p — вероятность наступления события в отдельном испытании. Тогда наивероятнейшее число наступлений события m_0 удовлетворяет неравенствам

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p, \qquad (1)$$

где $q = 1 - p$.

Отметим, что так как разность $np + p - (np - q) = p + q = 1$, то всегда существует целое число m_0, удовлетворяющее написанному выше двойному неравенству. При этом если $np + p$ — целое число, то наивероятнейших чисел два: $np - q$ и $np + q$.

1586. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

Решение. Известно, что $p = 0{,}31$, $n = 75$, а $q = 1 - p = 0{,}69$. Составляем двойное неравенство (1):

$$75 \cdot 0{,}31 - 0{,}69 \leqslant m_0 \leqslant 75 \cdot 0{,}31 + 0{,}31;$$
$$22{,}56 \leqslant m_0 \leqslant 23{,}56.$$

Отсюда следует, что $m_0 = 23$.

1587. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений двойки было равно 32?

Решение. В данном случае $p = \frac{1}{6}$, $m_0 = 32$. Требуется найти число независимых испытаний n. Величины p, $q = 1 - p$, m_0 и n связаны между собой неравенством (1): $np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p$, откуда

$$n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leqslant 32; \quad n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \geqslant 32.$$

Из первого неравенства $n \leqslant 197$, а из второго — $n \geqslant 191$. Таким образом, необходимо провести от 191 до 197 независимых испытаний.

1588. Какова вероятность наступления события A в каждом испытании, если наивероятнейшее число наступлений события A в 120 испытаниях равно 32?

Решение. Здесь $n = 120$, $m_0 = 32$. Согласно неравенству (1),

$$120p - (1 - p) \leqslant 32; \quad 120p + p \geqslant 32.$$

Решая полученную систему, находим, что $\frac{32}{121} \leqslant p \leqslant \frac{33}{121}$.

1589. Найти наивероятнейшее число наступлений ясных дней в течение первой декады сентября, если по данным многолетних наблюдений известно, что в сентябре в среднем бывает 11 ненастных дней.

1590. Производится 21 выстрел по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,25. Найти наивероятнейшее число попаданий в цель.

1591. Найти наивероятнейшее число наступлений события A при n независимых испытаниях, если вероятность появления данного события в отдельном испытании равна p:

1) $n = 16$, $p = 0{,}3$;
2) $n = 121$, $p = 0{,}6$;
3) $n = 217$, $p = 0{,}8$;
4) $n = 75$, $p = 0{,}2$;
5) $n = 63$, $p = 0{,}9$.

1592. Сколько следует провести повторных независимых испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений некоторого события оказалось равным 51, если вероятность появления этого события в отдельном испытании $p = 0{,}64$?

1593. Число коротких волокон в партии хлопка составляет 25% всего количества волокон. Сколько волокон должно быть в отдельно взятом пучке, если наивероятнейшее число коротких волокон в нем равно 114?

1594. Вероятность изготовления нестандартной детали $p = 0{,}05$. Сколько деталей должно быть в партии, чтобы наивероятнейшее число нестандартных деталей в ней было равно 63?

1595. Каждая из 6 палок разламывается на две части — длинную и короткую. Затем 12 полученных обломков n раз объединяется в 6 пар, каждая из которых образует новую палку. Чему равно n, если наивероятнейшее число объединений обломков в первоначальном порядке равно 6?

1596. Было посажено 28 семян ячменя с одной и той же вероятностью всхожести для каждого. Как велика эта вероятность, если наиболее вероятные числа положительных результатов 17 и 18?

1597. На станке-автомате изготовили 90 деталей. Чему равна вероятность изготовления на этом станке детали первого сорта, если наивероятнейшее число таких деталей в данной партии равно 82?

§ 3. Локальная теорема Лапласа

Если вероятность p появления некоторого события A постоянна в n независимых испытаниях и отлична от 0 и 1, то вероятность P_{mn} того, что в этих испытаниях событие A наступит m раз при $n \to \infty$, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq}\, P_{mn}}{\varphi(x)} = 1,$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Отсюда следует, что при сделанных предположениях относительно p, если n достаточно большое, имеет место приближенное равенство

$$P_{mn} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}.$$

1598. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

Решение. Требуется найти вероятность $P_{13\,26}$. Зная теорему Лапласа, необходимые вычисления производим по следующей схеме:

$p = 0{,}4$; $\quad np = 26 \cdot 0{,}4 = 10{,}4$;

$q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $\quad npq = 10{,}4 \cdot 0{,}6 = 6{,}24$;

$n = 26$; $\quad \sqrt{npq} = \sqrt{6{,}24} = 2{,}50$;

$m = 13$; $\quad m - np = 13 - 10{,}4 = 2{,}6$;

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{2{,}60}{2{,}50} = 1{,}04;$$

$$\varphi(x) = \varphi(1{,}04) = 0{,}2323;$$

$$P_{mn} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}2323}{2{,}50} = 0{,}093.$$

Значения функции $\varphi(x)$ находим по таблице (приложение 1).

1599. Монета была подброшена 40 раз. Пользуясь локальной теоремой Лапласа, найти вероятность того, что герб выпадет в 25 случаях.

1600. Из партии, в которой доля первосортных деталей равна 0,8, отобрано 60 единиц (с возвратом). Определить ве-

роятность того, что среди отобранных деталей окажется первого сорта: 1) 30; 2) 45; 3) 48; 4) 50; 5) 55.

1601. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12. Вычислить вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров более 36 выдержат гарантийный срок.

1602. Бюффон бросил монету 4040 раз. При этом герб выпал 2048 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат?

1603. Приняв вероятность рождения мальчика равной 0,515, найти вероятность того, что среди 80 новорожденных 42 мальчика.

1604. Стрелок сделал 30 выстрелов с вероятностью попадания при отдельном выстреле 0,3. Найти вероятность того, что при этом будет 8 попаданий.

1605. Английский биолог и статистик Пирсон, подбросив 12 000 раз монету, получил частость выпадения герба 0,5016. Найти вероятность получения такой частости при повторном опыте.

1606. Доказать, что вероятность наступления события A в n независимых испытаниях наивероятнейшее число раз может быть приближенно найдена по формуле

$$(2\pi npq)^{-\frac{1}{2}},$$

где p — вероятность появления события A в отдельном испытании; $q = 1 - p$.

1607. Какова вероятность того, что среди 100 групп по три человека найдется 16 групп, в каждой из которых все дни рождения лиц приходятся на два календарных месяца, оставляя 10 месяцев свободными? Следует иметь в виду, что не все месяцы имеют одинаковую длину и рождаемость в течение года не вполне постоянна. Однако в первом приближении можно считать, что все месяцы в году с одинаковыми вероятностями могут быть месяцем рождения.

1608. Автоматическая штамповка клемм для предохранителей дает 10% отклонений от принятого стандарта. Сколько стандартных клемм следует ожидать с вероятностью 0,0587 среди 400 клемм?

1609. Игральная кость налита свинцом таким образом, что выпадение каждой грани пропорционально числу очков на ней. Чему равна вероятность того, что при 98 подбрасываниях четное число очков выпадет наивероятнейшее число раз?

1610. В партии смешаны детали двух сортов: 80% первого и 20 второго. Сколько деталей первого сорта с вероятностью

0,0967 можно ожидать среди 100 наудачу взятых деталей (выборка возвратная)?

1611. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появление события A в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5?

§ 4. Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что m — число появлений события A при n испытаниях — заключено между $a = np + \alpha\sqrt{npq}$ и $b = np + \beta\sqrt{npq}$ $(a < b)$, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(a < m < b)}{\frac{1}{2}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]} = 1, \tag{1}$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — функция Лапласа, а $\alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$ и $\beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$ $(q = 1 - p)$. Отсюда при достаточно большом n следует приближенное равенство

$$P(a < m < b) \approx \frac{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}{2}. \tag{2}$$

Если в соотношении (1) положить $\alpha = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ и $\beta = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, то получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(np - \varepsilon n < m < np + \varepsilon n)}{\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)} = 1, \tag{3}$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$ (теорема Бернулли), так как $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 1$ и $P(np - \varepsilon n < m < np + \varepsilon n) = P\left(-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$.

При достаточно больших n из формулы (3) следует приближенное равенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \tag{4}$$

или

$$P(|m - np| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right). \tag{5}$$

1612. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760?

Решение. Известны число независимых испытаний $n = 1000$ и вероятность наступления события в отдельном испытании $p = 0{,}7$. Требуется найти вероятность того, что число появлений события заключено между $a = 652$ и $b = 760$. Искомую вероятность находим по формуле (2):

$$P(a < m < b) \approx \frac{1}{2}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)].$$

Расчет α и β производим по следующей схеме:

$np = 0{,}7 \cdot 1\,000 = 700;$

$npq = 700 \cdot (1 - 0{,}7) = 700 \cdot 0{,}3 = 210;$

$\sqrt{npq} = \sqrt{210} = 14{,}491;$

$a - np = 652 - 700 = -48;$

$\alpha = \dfrac{a - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{-48}{14{,}491} = -3{,}31;$

$b - np = 760 - 700 = 60;$

$\beta = \dfrac{b - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{60}{14{,}491} = 4{,}14;$

$$\begin{array}{l} \Phi(\beta) = \Phi(4{,}14) = 0{,}99997 \\ -\Phi(\alpha) = \Phi(-3{,}31) = -0{,}99813 \\ \hline \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = 1{,}99810. \end{array}$$

Поэтому искомая вероятность приближенно равна

$$\frac{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}{2} = \frac{1{,}99810}{2} = 0{,}99905.$$

1613. Бюффон бросил монету 4040 раз, причем герб выпал 2048 раз. Можно ли считать полученное отклонение числа появлений герба от 2020 случайным или же оно обусловлено систематической причиной?

Решение. Расхождение эмпирической частоты Бюффона от теоретической можно считать случайным, если вероятность того, что при 4040 бросаниях монеты отклонение числа выпадений герба от 2020 равно или больше по абсолютной величине, чем у Бюффона, достаточно большая. Пусть m — число выпадений герба при 4040 бросаниях монеты. Находим вероятность

$$P(|m - 2020| < 28),$$

где $28 = |2048 - 2020|$;

$$P(|m - np| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

В данном случае $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, $n = 4040$, $\varepsilon = 28$. Отсюда

$$np = 4040 \cdot 0{,}5 = 2020; \qquad \sqrt{npq} = \sqrt{1010} = 31{,}78;$$

$$npq = 2020 \cdot 0{,}5 = 1010; \qquad \frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} = \frac{28}{31{,}78} = 0{,}881;$$

$$P(|m - 2020| < 28) \approx \Phi(0{,}881) = 0{,}6217.$$

Поэтому вероятность противоположного события, т. е. того, что $|m - 2020| \geqslant 28$, равна $1 - 0{,}6217 = 0{,}3783$. Так как эта вероятность достаточно большая, то результат Бюффона можно считать обусловленным случайными причинами.

1614. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Найти границу абсолютной величины отклонения частости взошедших семян от вероятности $p = 0{,}9$, если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью $P = 0{,}995$.

Решение. Мы знаем, что если n — число независимых испытаний и p — вероятность наступления события в отдельном испытании, то при любом $\varepsilon > 0$ имеет место приближенное равенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $q = 1 - p$. В нашем случае $n = 600$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P = 0{,}995$, ε — ? По формуле (4)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}9\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) \text{ или } \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) = 0{,}995.$$

Пользуясь таблицей (приложение 2), решаем уравнение $\Phi(t) = 0{,}995$: $t = 2{,}81$. Отсюда $\varepsilon \sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 2{,}81$ и, следовательно,

$$\varepsilon = 2{,}81 \sqrt{\frac{0{,}09}{6 \cdot 100}} = \frac{2{,}81 \cdot 0{,}3}{10\sqrt{6}} = 0{,}034.$$

1615. С конвейера сходит в среднем 85% изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение частости изделий первого сорта в них от 0,85 по абсолютной величине не превосходило 0,01?

Решение. Здесь $p = 0{,}85$, $q = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$, $\varepsilon = 0{,}01$, $P = 0{,}997$, n — ? Так как в равенстве $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ известна вероятность P, стоящая слева, то сначала решим уравнение $\Phi(t) = P$. Пусть t_P — корень этого уравнения. Тогда $\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \approx t_P$, $\varepsilon^2 \frac{n}{pq} \approx t_P^2$ и, следовательно, $n \approx$

$\approx \frac{pqt_P^2}{\varepsilon^2}$. Для нашего случая $t_{0,997} = 3$, поэтому

$$n \approx \frac{0{,}85 \cdot 0{,}15 \cdot 3^2}{(0{,}01)^2} = \frac{1{,}1475}{0{,}0001} = 11\,475.$$

1616. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700, если вероятность, что отдельное изделие будет высшего сорта, равна 0,62.

1617. Проведено 700 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступлений события A равна 0,7. Найти вероятность того, что частота появлений события A окажется заключенной между 460 и 600.

1618. Найти вероятность того, что число мальчиков среди 1000 новорожденных больше 480, но меньше 540 (вероятность рождения мальчика принять равной 0,515).

1619. Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 250, если вероятность, что отдельное дерево приживется, равна 0,8.

1620. В ящике 10 револьверов одной системы и одинаковых по виду; из них 4 непристрелянных. Вероятность попадания в цель из непристрелянного револьвера равна 0,3, а из пристрелянного — 0,9. Из взятого наудачу револьвера произведено 200 выстрелов по цели. Чему равна вероятность того, что число попаданий в цель заключено между 120 и 150?

1621. На склад поступает продукция 3 фабрик, причем изделия первой фабрики на складе составляют 30%, второй — 32 и третьей — 38. В продукции первой фабрики 60% изделий высшего сорта, второй — 25, третьей — 50. Найти вероятность того, что среди 300 наудачу взятых со склада изделий число изделий высшего сорта заключено между 130 и 170.

1622. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий отклонение числа изделий первого сорта от наивероятнейшего числа не превысит по абсолютной величине 50, если вероятность появления изделия первого сорта равна 0,7.

1623. В каждой из 1000 колод по 36 карт. Из каждой колоды вынимают наудачу две карты. Чему равна вероятность того, что число пар хотя бы с одним тузом заключено между 100 и 200?

1624. Найти приближенное выражение для вероятности того, что число выпадений тройки при 4200 бросаниях игральной кости будет заключено между 650 и 700.

1625. Найти такое число k, чтобы с вероятностью, приблизительно равной 0,7, число выпадений герба при 4000 бросаниях монеты было заключено между 3000 и k.

1626. Найти такое число k, чтобы с вероятностью, приблизительно равной 0,9, можно было утверждать, что число мальчиков среди 900 новорожденных больше k.

1627. При 10 000 бросаниях монеты герб выпал 6000 раз. Можно ли считать, что монета симметрична?

1628. Пирсон подбросил монету 12 000 раз и при этом наблюдал 6019 раз выпадение герба. Чему равна вероятность того, что при повторении опыта отклонение частости от 0,5 по абсолютной величине не превзойдет полученного отклонения?

1629. В каждой из 1000 урн находится 5000 черных и 5000 белых шаров. Из каждой урны извлекаются без возвращения 3 шара. Чему равна вероятность того, что число урн, из которых извлекли одноцветные шары, заключено между 200 и 310?

1630. Вероятность попадания в мишень при каждом из 700 выстрелов равна 0,4. Какое максимально возможное отклонение частости от вероятности попадания при отдельном выстреле можно ожидать с вероятностью 0,997?

1631. Вероятность выпуска радиолампы с дефектом равна 0,03. Найти максимально возможное отклонение ε частости от 0,03 среди 2000 радиоламп, чтобы вероятность получить отклонение, по абсолютной величине меньшее ε, была равна 0,999.

1632. Произведено 1000 независимых испытаний с вероятностью наступления интересующего нас события A в отдельном испытании 0,01. Найти границы, в которых с вероятностью 0,99 заключена частость наступлений события A.

1633. Взято 800 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,3. Считая событие, вероятность наступления которого 0,997, достоверным, найти границы числа проб с промышленным содержанием металла во взятой партии проб.

1634. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний постоянна и равна 0,6. Сколько испытаний необходимо произвести, чтобы вероятность отклонения частости от 0,6 в ту и другую сторону менее чем на 0,01 была равна 0,995?

1635. Сколько раз надо повторить по два бросания трех игральных костей, чтобы с вероятностью 0,999 можно было утверждать, что частость выпадения одного и того же результата при первом и втором бросании отличается от соответствующей вероятности по абсолютной величине не менее чем на 0,01? Рассмотреть два случая: 1) кости отличны друг от друга; 2) кости одинаковы.

1636. Среди продукции, изготовленной на данном станке, брак составляет 2%. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,995 можно было ожидать, что частость бра-

кованных изделий среди них отличается от 0,02 по абсолютной величине не более чем на 0,005?

1637. Сколько семян кукурузы необходимо посеять, чтобы частость взошедших семян с вероятностью 0,99 отличалась от вероятности прорастания отдельного семени 0,95 по абсолютной величине меньше чем на 0,01?

1638. На склад магазина поступают изделия, 80% которых высшего сорта. Сколько изделий надо взять наудачу со склада, чтобы с вероятностью 0,997 можно было утверждать, что частость изделий первого сорта находится между 0,75 и 0,85?

1639. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. Застрахована на один год группа в 1000 человек 20-летнего возраста. Страховой взнос каждого из них составил 15 руб. В случае смерти застрахованного наследникам выплачивается 1200 руб. Какова вероятность того, что к концу года страховое учреждение окажется в убытке?

1640. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. В случае смерти застрахованного страховое учреждение выплачивает наследникам 500 руб. Застрахована группа в 10 000 человек 20-летнего возраста. Какую минимальную стоимость страховых взносов следует установить, чтобы вероятность того, что к концу года страховое учреждение окажется в убытке, была не больше 0,1?

1641. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. Застрахована группа в 15 000 человек 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 20 руб. Какую максимальную выплату наследникам следует установить, чтобы вероятность того, что к концу года страховое учреждение окажется в убытке, была не больше 0,0228?

1642. В задаче 1609 найти вероятность того, что число выпадений четного числа очков отличается от 56 по абсолютной величине меньше чем на 10.

Глава XIV Случайные величины

Величина, которая в зависимости от случая может принимать различные числовые значения, называется *случайной*. Данная величина характеризуется значениями, которые она может принимать, и вероятностями, с которыми эти значения принимаются.

Пусть X — случайная величина и x — произвольное действительное число. Тогда вероятность того, что X примет значение меньшее, чем x, называется *функцией распределения вероятностей* данной случайной величины X:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения вероятностей случайной величины X вполне определяет эту случайную величину.

Основными свойствами функции распределения любой случайной величины X являются:

1) если $a < b$, то $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$;

2) функция распределения любой случайной величины всегда неубывающая;

3) функция распределения непрерывна слева, т. е. $\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a)$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

§ 1. Дискретные случайные величины

Случайная величина, которая принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ соответственно с вероятностями $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n), \ldots$, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} p(x_n) = 1\right)$, называется *дискретной*.

Функция распределения дискретной случайной величины определяется посредством равенства $F(x) = \sum p(x_i)$, где суммирование распространяется на все индексы, для которых $x_i < x$.

Пусть X — дискретная случайная величина, возможные значения которой и соответствующие им вероятности задаются таблицей:

x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\ldots$	$p(x_i)$	$\ldots$

Тогда *математическим ожиданием* данной случайной величины называют $EX = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n p(x_n)$, если этот ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1) математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $EC = C$, $C = \text{const}$;

2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $E(kX) = kEX$, $k = \text{const}$;

3) математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий: $E(X \pm Y) = EX \pm EY$;

4) математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = EX \cdot EY$;

5) математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания всегда равно нулю: $E(X - EX) = 0$.

Математическое ожидание — это среднее значение данной случайной величины, центр ее распределения.

Другой важной характеристикой случайной величины является ее *дисперсия*, которая служит мерой рассеивания данной случайной величины по отношению к ее метематическому ожиданию.

Математическое ожидание квадрата отклонения данной случайной величины от ее математического ожидания есть дисперсия:

$$DX = E(X - EX)^2.$$

Дисперсия случайной величины обладает следующими свойствами:

1) дисперсия постоянной величины равна нулю: $DC = 0$, $C = \text{const}$;

2) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(kX) = k^2DX$;

3) если X и Y — независимые случайные величины, то $D(X \pm Y) = DX + DY$;

4) дисперсия случайной величины X равна математическому ожиданию квадрата случайной величины минус квадрат ее математического ожидания: $DX = EX^2 - (EX)^2$.

Корень квадратный из дисперсии называют *средним квадратическим отклонением*: $\sigma = \sqrt{DX}$.

1643. Даны две независимые случайные величины: X — число появлений герба при 2 подбрасываниях пятикопеечной монеты и Y — число очков, выпавших при бросании игральной кости. Найти закон распределения разности этих двух случайных величин $X - Y$, математические ожидания и дисперсии случайных величин X, Y, $X - Y$ и проверить, что $E(X - Y) = EX - EY$ и $D(X - Y) = DX + DY$.

Решение. Так как случайная величина X принимает значение m с вероятностью $P_{m2} = C_2^m p^m q^{2-m}$ (формула Бернулли),

где $m = 0,\ 1,\ 2$ и $p = 0{,}5$, то таблицей распределения этой случайной величины является

x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Отсюда

$$EX = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1;$$

$$DX = E(X - EX)^2 = E(X-1)^2 = (0-1)^2\cdot\frac{1}{4} + (1-1)^2\cdot\frac{1}{2} + (2-1)^2\cdot\frac{1}{4} = 0{,}5.$$

Таблица распределения случайной величины Y имеет вид:

y	1	2	3	4	5	6
$p(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда

$$EY = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}500;$$

$$DY = (1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} = 2{,}917.$$

Чтобы получить распределения $X - Y$, составим следующую таблицу, которая даст различные возможные случаи: $X = x_i$, $Y = y_j$, вероятности этих случаев: $P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i)\,P(Y = y_j)$ (случайные величины независимы) и значения $X - Y$ в каждом из них:

Различные возможные случаи	$X = x_i$	0	0	0	0	0	0	1	1	1
	$Y = y_j$	1	2	3	4	5	6	1	2	3
Вероятности этих случаев	$P(X=x_i, Y=y_j)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
Значения $X - Y$	$x_i - y_j$	−1	−2	−3	−4	−5	−6	0	−1	−2

Продолжение

Различные возможные случаи	$X = x_i$	1	1	1	2	2	2	2	2	2
	$Y = y_j$	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Вероятности этих случаев	$P(X=x_i, Y=y_j)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
Значения $X-Y$	$x_i - y_j$	−3	−4	−5	1	0	−1	−2	−3	−4

Мы замечаем, что $X-Y$ принимает иногда одно и то же значение в различных случаях. Пользуясь теоремой сложения вероятностей, объединяем эти случаи в один (случайная величина $X-Y$ принимает заданное значение). Тогда получим следующую таблицу распределения случайной величины $X-Y$:

−6	−5	−4	−3
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$

−2	−1	0	1
$\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

или

−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

Отсюда

$$E(X-Y) = -6\cdot\frac{1}{24} + (-5)\cdot\frac{1}{8} - 4\cdot\frac{1}{6} - 3\cdot\frac{1}{6} - 2\cdot\frac{1}{6} - \\ - 1\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{24} = -2{,}5.$$

Проверяем свойство 3 математического ожидания: $E(X-Y)=EX-EY$.

Оно выполняется: $-2{,}5=1-3{,}5=-2{,}5$. Затем

$$D(X-Y)=(-6+2{,}5)^2\cdot\frac{1}{24}+(-5+2{,}5)^2\cdot\frac{1}{8}+(-4+2{,}5)^2\frac{1}{6}+(-3+2{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(-2+2{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(-1+2{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(0+2{,}5)^2\cdot\frac{1}{8}+(1+2{,}5)^2\cdot\frac{1}{24}=3{,}417.$$

Проверяем свойство 3 дисперсии: $D(X-Y)=DX+DY$. Оно также выполняется: $3{,}417=0{,}5+2{,}917=3{,}417$.

1644. Случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью

$$P_m=C_n^m p^m q^{n-m}\quad(0\leqslant p\leqslant 1;\ p+q=1;\ m=0,1,\ \ldots,\ n),$$

называется *биномиальной*. Найти математическое ожидание и дисперсию такой случайной величины.

Решение. X можно рассматривать как число наступлений некоторого события A при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления одна и та же и равна p. Пусть X_i — число наступлений события A в i-м испытании. $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, где X_i имеет следующую таблицу распределения:

$$X_i\ \frac{0\mid 1}{q\mid p}.$$

$$EX=E\sum_{i=1}^{n}X_i=\sum_{i=1}^{n}EX_i=\sum_{i=1}^{n}(0\cdot q+1\cdot p)=\sum_{i=1}^{n}p=np.$$

Из независимости испытаний следует независимость X_i, поэтому

$$DX=D\sum_{i=1}^{n}X_i=\sum_{i=1}^{n}DX_i=\sum_{i=1}^{n}[EX_i^2-(EX_i)^2]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[p-p^2]=np(1-p)=npq.$$

1645. Случайная величина, которая принимает значение m с вероятностью

$$P_m(\lambda)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\quad(m=0,1,\ \ldots,\ m,\ \ldots;\ \lambda>0),$$

называется *распределенной по закону Пуассона*. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. $EX = \sum_{m=0}^{\infty} mP_m(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!}$

(первое слагаемое опустили, так как оно равно нулю). В полученной сумме заменим m на $k+1$ и получим

$$EX = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda,$$

так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Зная EX, по свойству 4 дисперсии: $DX = EX^2 - (EX)^2$ можно определить DX. Для этого осталось найти EX^2:

$$EX^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!}.$$

Опять положим $m - 1 = k$. Тогда

$$EX^2 = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} +$$

$$+ \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda EX + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

Отсюда

$$DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

1646. Найти математические ожидания и дисперсии следующих случайных величин, заданных своими таблицами распределения:

1)

x	—2	—1	0	1	2
$p(x)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

2)

x	1	3	4	6	7
$p(x)$	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

3)

x	5	7	10	15
$p(x)$	0,2	0,5	0,2	0,1

4)

x	100	150	200	250	300
$p(x)$	0,4	0,3	0,2	0,05	0,05

1647. Даны независимые случайные величины:

1) X

x	1	2	3
$p(x)$	0,1	0,3	0,6

Y

y	−2	−1	0
$p(y)$	0,6	0,3	0,1

2) X

x	0	1	2
$p(x)$	0,25	0,5	0,25

Y

y	0	1	2	3
$p(y)$	0,4	0,3	0,2	0,1

3) X

x	4	6	7
$p(x)$	0,7	0,2	0,1

Y

y	−3	−2	0
$p(y)$	0,2	0,4	0,4

4) X

x	−1	0	1
$p(x)$	0,3	0,4	0,3

Y

y	−2	1	2	3
$p(y)$	0,3	0,3	0,3	0,1

Составить распределение их суммы $X+Y$ и их произведения XY. Найти EX, EY, $E(X+Y)$, $E(XY)$, DX, DY, $D(X+Y)$ и проверить:

$$E(X+Y)=EX+EY;$$
$$E(XY)=EX\cdot EY;$$
$$D(X+Y)=DX+DY.$$

1648. Производится стрельба по некоторой цели до первого попадания без ограничения числа выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов, если вероятность попадания при каждом выстреле одна и та же и равна p.

Решение. Сначала найдем вероятность того, что стрельба окончится $(n+1)$-м выстрелом (первые n выстрелов дали непопадания, а $(n+1)$-й выстрел — попадание). Так как вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей, то искомая вероятность

$$\underbrace{qq\ldots q}_{n}p = q^n p,$$

где $q = 1-p$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть случайная величина X — число произведенных выстрелов. Тогда

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n p = p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = pS(q),$$

где $S(q) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ — сумма степенного ряда с радиусом сходимости, равным 1. Поэтому при $|q|<1$

$$\int_0^q S(q)dq = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^q (n+1)q^n dq = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{q^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}q^{n+1} = \frac{q}{1-q}.$$

Отсюда $S(q) = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$, а

$$EX = pS(q) = p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Аналогично находим дисперсию случайной величины X:

$$DX = EX^2 - (EX)^2;\ EX^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 q^n p =$$

$$= p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 q^n = pL(q),$$

где $L(q)$ — сумма степенного ряда с радиусом сходимости, равным 1. При $|q|<1$

$$\int_0^q L(q)\,dq = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^q (n+1)^2 q^n dq = q\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = qS(q) = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Поэтому $L(q) = \left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]' = \frac{1+q}{(1-q)^3}$; $EX^2 = \frac{p(1+q)}{p^3} =$

$= \frac{1+q}{p^2}$; $DX = \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$.

1649. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходо-

ванных патронов. Построить график функции распределения этой случайной величины, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25.

1650. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,75 и четвертого — 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

1651. В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. Составить таблицу распределения числа бракованных изделий из 6 взятых наудачу деталей. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1652. Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появлений герба.

1653. Игральную кость подбросили 12 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию числа невыпадений единицы.

1654. Некий человек, имея 8 ключей, хочет открыть дверь. При этом он подбирает ключи случайно. Найти математическое ожидание и дисперсию числа испытаний при следующих условиях: 1) испробованный ключ не устраняется из дальнейшего выбора; 2) устраняется (предполагается, что только один ключ подходит к двери).

1655. Пусть независимые испытания, в каждом из которых может появиться событие A с одной и той же вероятностью 0,1, продолжаются до первого появления события A. Найти математическое ожидание числа проведенных испытаний.

1656. Независимые испытания продолжаются до осуществления события A s раз. Каково математическое ожидание проведенных испытаний, если вероятность наступления A в любом испытании одна и та же и равна p?

1657. Стрельбу по цели ведут до получения двух попаданий. Найти математическое ожидание числа произведенных выстрелов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2.

1658. Доказать, что сумма двух независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2, также распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

1659. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна 0,1. Для проверки качества изготовляемых изделий отдел технического контроля (ОТК) берет из партии не более 4 деталей. При обнаружении нестандартного изделия вся партия задерживается. Составить закон распределения числа изделий, прове-

ряемых в ОТК из каждой партии. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1660. На пути движения автомашины 4 светофора, каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомашины с вероятностью 0,5. Построить полигон распределения; найти функцию распределения числа пройденных автомашиной светофоров до первой остановки; построить график этой функции. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

1661. Человек стоит в начале координат числовой оси. Он бросает монету и после каждого бросания делает один шаг вправо при выпадении решетки и один шаг влево при выпадении герба. Найти закон распределения абсциссы X, определяющей положение человека после n бросаний монеты. Особо рассмотреть случай, когда монета несимметрична и вероятность выпадения герба равна некоторому p. Найти EX и DX.

1662. Большое число N людей подвергается исследованию крови. Это исследование может быть организовано двумя способами: 1) кровь каждого человека исследуется отдельно — в этом случае потребуется N анализов: 2) кровь n людей смешивается, и анализируется полученная смесь. Если результат анализа отрицательный, то одного анализа достаточно для n человек. Если же он положительный, то кровь каждого из этих людей приходится исследовать затем отдельно, и в целом на n человек понадобится $n+1$ анализ. Предполагается, что вероятность p положительного результата анализа одна и та же для всех людей и что результаты анализов независимы в теоретико-вероятностном смысле. Чему равна вероятность того, что анализ смешанной крови людей положителен? Чему равно математическое ожидание числа анализов X, необходимых при втором способе исследования?

§ 2. Непрерывные случайные величины

Случайная величина называется *непрерывной*, если функция ее распределения имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt,$$

где $p(t)$ — некоторая неотрицательная функция, называемая *плотностью распределения вероятностей* данной случайной величины.

Непрерывная случайная величина может принять любое значение из некоторого интервала в отличие от дискретной слу-

чайной величины, которая, как указывалось выше, может принимать только изолированные значения.

Плотность распределения вероятностей обладает следующими свойствами:

1) $p(x) \geqslant 0$;

2) $P(x_1 \leqslant X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$;

4) если в точке x $p(x)$ непрерывна, то $F'(x) = p(x)$.

Случайная величина называется *нормальной*, если ее плотность распределения вероятностей вычисляется по формуле

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

Математическое ожидание EX и дисперсия DX непрерывной случайной величины, распределенной с плотностью $p(x)$, определяются так:

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx; \quad DX = E(X - EX)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 p(x)\,dx. \qquad (2)$$

Если X — нормальная случайная величина с плотностью, указанной выше, то $EX = a$, $DX = \sigma^2$;

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \frac{1}{2}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)], \qquad (3)$$

где $\alpha = \frac{x_1 - a}{\sigma}$; $\beta = \frac{x_2 - a}{\sigma}$; $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, и

$$P(|X - a| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) (\varepsilon > 0). \qquad (4)$$

Если в равенстве (4) ε положить равным 3σ, то получим

$$P(|X - a| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1.$$

Таким образом, практически невозможно, чтобы отклонение нормальной случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине превосходило утроенное среднее квадратическое отклонение (правило трех сигм). Если о законе распределения X не известно, то можно утверждать только, что

$$P(|X - a| < 3\sigma) \geqslant \frac{8}{9} \quad \text{(см. задачу 1695).}$$

Если X и Y — независимые случайные величины с плотностями распределения соответственно $p_1(x)$ и $p_2(x)$, то плотность распределения их суммы $X+Y$ находится по формуле

$$p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x-y)\,p_2(y)\,dy.$$

1663. В силу разнообразных причин телевизоры, поступающие в мастерскую для ремонта имеют, как правило, всевозможные неисправности. Поэтому время (время обслуживания), необходимое для устранения неисправностей, есть случайная величина T. Найти математическое ожидание и дисперсию времени обслуживания телевизоров, если функция распределения вероятностей такова:

$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t\leqslant 0,\\ 1-e^{-\nu t} & \text{при } t>0\end{cases}\qquad (\nu>0)$$

(показательный закон распределения времени обслуживания).

Решение. Так как в формулы для математического ожидания и дисперсии входит плотность распределения вероятностей, то для решения задачи сначала найдем плотность $p(t)$:

$$p(t)=F'(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t\leqslant 0,\\ (1-e^{-\nu t})' & \text{при } t>0\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{при } t\leqslant 0,\\ \nu e^{-\nu t} & \text{при } t>0.\end{cases}$$

Тогда среднее время обслуживания телевизора

$$ET=\int_{-\infty}^{+\infty} tp(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty} t\nu e^{-\nu t}\,dt=-\int_{0}^{+\infty} t\,de^{-\nu t}=-te^{-\nu t}\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+\int_0^{+\infty} e^{-\nu t}\,dt=-\frac{1}{\nu}\cdot e^{-\nu t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\nu}.$$

Зная, что

$$DT=ET^2-(ET)^2,\ \text{а}\ ET^2=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2p(t)\,dt=\int_0^{+\infty} t^2\nu e^{-\nu t}\,dt=$$

$$=-\int_0^{+\infty} t^2\,de^{-\nu t}=-t^2e^{-\nu t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\nu t}\cdot 2t\,dt=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\nu}\int_0^{+\infty} t\nu e^{-\nu t}\,dt=2\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{\nu}=\frac{2}{\nu^2},$$

найдем

$$DT=\frac{2}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^2}=\frac{1}{\nu^2}.$$

1664. При исследовании распределения дохода или имущества в некоторых случаях каждое конкретное значение имущества можно рассматривать как результат действия большого числа взаимно независимых факторов, каждый из которых вызывает некоторое приращение, пропорциональное уже достигнутому уровню дохода. В этом случае размер дохода можно рассматривать распределенным по так называемому логарифмически-нормальному закону, в котором плотность распределения определяется по формуле

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. По известной формуле

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

В полученном интеграле произведем замену переменного, положив $t=\dfrac{\ln x-a}{\sigma}$. Тогда $\ln x=a+\sigma t$, $x=e^{a+\sigma t}$, $dx=\sigma e^{a+\sigma t}\,dt$. При $x=0$ $t=-\infty$, а при $x=+\infty$ $t=+\infty$. Отсюда

$$EX=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma e^{a+\sigma t}\,dt=\frac{e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}}dt=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}},$$

так как $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}}dt=1$ (интеграл Пуассона).

Так как

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{e^{2a}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+2\sigma t}dt=\frac{e^{2a}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-2\sigma)^2}{2}+2\sigma^2}dt=e^{2a+2\sigma^2},$$

то

$$DX=EX^2-(EX)^2=e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

1665. Известно, что плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Найдем сначала функцию распределения случайной величины Y. Так как она не принимает отрицательных значений, то $F(y)=P(Y<y)$ для $y\leqslant 0$ равна нулю. Пусть $y>0$. Тогда

$$F(y)=P(Y<y)=P(X^2<y)=P(|X|<\sqrt{y})=P(-\sqrt{y}<X<$$

$$<\sqrt{y})=\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Итак,

$$F(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx & \text{при } y>0.\end{cases}$$

Поэтому искомая плотность распределения определяется по формуле

$$\varphi(y)=F'(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \text{при } y>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при } y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} & \text{при } y>0.\end{cases}$$

1666. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x)=|x|e^{-x^2}.$$

Чему равна вероятность того, что данная случайная величина примет значение, лежащее на интервале $(0, 1)$?

Решение. Искомая вероятность $P(0<X<1)$ может быть найдена с помощью свойства 2 плотности распределения вероятностей

$$P(x_1<X<x_2)=\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx.$$

В нашем случае

$$P(0<X<1)=\int_0^1 |x|\,e^{-x^2}\,dx=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}e^t dt=$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-1})=\frac{1}{2}(1-0{,}3679)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}6321=0{,}3160$$

(здесь произведена замена переменного $t=-x^2$).

1667. Пусть $\varphi(x)$ — плотность распределения случайной величины x. Найти плотность распределения случайной величины Y, если $Y=-X$.

1668. Случайная величина X принимает значения из интервала (a, b) и распределена равномерно. Чему равна плотность распределения? Найти EX и DX.

1669. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Найти ее плотность распределения.

1670. Плотность распределения случайной величины X записывается так:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0 \text{ и } x>\pi,\\ A\sin x & \text{при } 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

Чему равно A? Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1671. Случайная величина X распределена по нормальному закону (1) с параметром $a=0$. Найти плотность распределения случайной величины $|X|$.

1672. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $a=0$ и $\sigma=1$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=X^{-1}$. Построить график полученной функции.

1673. Найти EX и DX случайной величины X, плотность распределения которой определяется по формуле $\varphi(x)=0{,}5\,e^{-|x+1|}$.

1674. Пусть $\varphi(x)$ — плотность распределения случайной величины X. Найти плотность распределения случайной величины Y в следующих случаях:

1) $Y=kX$ $(k>0)$;
2) $Y=X+a$;
3) $Y=kX+a$ $(k>0)$;
4) $Y=X^2$;
5) $Y=X^3$;
6) $Y=\ln X\,(X>0)$

(здесь k и a — постоянные).

1675. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$F(x) = C_n \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt$ (распределение Стьюдента).

Найти плотность распределения случайной величины X. Чему равно C_2?

1676. Плотность распределения вероятностей случайной величины X записывается так:

$$\varphi(x) = \begin{cases} C(1-x^2)^{\alpha} & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

(одно из распределений Пирсона). Найти C, EX, DX при $\alpha = \pm 0{,}5;\ 0$.

1677. Доказать, что сумма двух независимых случайных величин X и Y, распределенных по нормальному закону, есть нормальная случайная величина.

1678. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Решение. Так как математическое ожидание непрерывной случайной величины с плотностью $p(x)$ определяется по формуле

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx,$$

то в нашем случае

$$EX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Произведем замену переменного в этом интеграле, положив $\frac{x-a}{\sigma} = t$. Тогда $x = a + \sigma t$, $dx = \sigma dt$ и, следовательно,

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma t) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt +$$

$$+ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = a,$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$ (интеграл Пуассона);

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$$ (нечетная подынтегральная функция).

Дисперсия

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$ Заменим переменное

$$x - a = \sigma t.\ DX = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)\, de^{-\frac{t^2}{2}} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (-t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sigma^2.$$

Итак, $EX = a$, $DX = \sigma^2$.

1679. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Требуется найти вероятное отклонение данной случайной величины, т. е. такую постоянную E, что

$$P(|X-a| < E) = 50\%.$$

Решение. $P(|X-a| < E) = \Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)$.

Здесь $\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)$ — значение функции Лапласа в точке $\frac{E}{\sigma}$. По условию задачи $\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right) = 0{,}5$. По таблице (приложение 2) находим значение аргумента t, при котором $\Phi(t) = 0{,}5$: $t = 0{,}675$. Следовательно,

$$\frac{E}{\sigma} = 0{,}675 \text{ и } E = 0{,}675\,\sigma.$$

1680. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 1, и дисперсией, равной 4, примет значение, меньшее 0, но большее — 5.

1681. Чему равна вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 1, примет значение из интервала (0,5; 3,5)?

1682. Функцию распределения нормальной случайной величины, математическое ожидание которой равно a, а дисперсия σ^2, выразить через функцию Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

1683. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — попарно независимые нормальные случайные величины. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - EX_i)^2}{DX_i},$$

распределение которой называется χ^2-*распределением с n степенями свободы.*

Глава XV Закон больших чисел

§ 1. Неравенство Маркова

Если у неотрицательной случайной величины X существует математическое ожидание EX, то при любом положительном ξ имеет место неравенство

$$P(X < \xi) \geqslant 1 - \frac{EX}{\xi}.$$

1684. Средний срок службы мотора 4 года. Оценить снизу вероятность того, что данный мотор не прослужит более 20 лет.

Решение. Пусть случайная величина X — срок службы мотора. Из условия задачи следует, что $EX = 4$. Требуется оценить снизу вероятность $P(X < 20)$. Эту вероятность можно рассматривать как левую часть неравенства Маркова с $\xi = 20$. Тогда

$$P(X < 20) \geqslant 1 - \frac{EX}{\xi} = 1 - \frac{4}{20} = 0{,}8.$$

1685. Сумма всех вкладов в некоторой сберегательной кассе составляет 20 000 руб., а вероятность того, что случайно взятый вклад не превышает 100 руб., равна 0,8. Что можно сказать о числе вкладчиков данной сберегательной кассы?

Решение. Пусть X — величина случайно взятого вклада, а n — число всех вкладчиков. Тогда из условия задачи следует, что $EX = \frac{20\,000}{n}$. Так как $P(X < 100) = 0{,}8$ и по неравенству Маркова $P(X < 100) \geqslant 1 - \frac{EX}{100}$, то $0{,}8 \geqslant 1 - \frac{20\,000}{n \cdot 100}$. Отсюда

$$\frac{20\,000}{n \cdot 100} \geqslant 0{,}2, \quad 200 \geqslant n \cdot 0{,}2, \quad n \leqslant 1000.$$

1686. Дана случайная величина X:

x	2	4	6	8	10	12
$p(x)$	0,1	0,3	0,25	0,15	0,15	0,05

Какова вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее 11? Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Маркова.

1687. Принимая вероятность попадания в цель при выстреле равной 0,4, оценить вероятность того, что при 120 выстрелах окажется не более 80 попаданий. Найти приближенное значение этой вероятности, пользуясь интегральной теоремой Лапласа.

1688. Среднее значение расхода воды в населенном пункте составляет 50 000 *л* в день. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте расход воды не будет превышать 120 000 *л* в день.

1689. Неотрицательные случайные величины X и Y независимы. Оценить снизу вероятность неравенств:
1) $X+Y<40$,
2) $XY<200$,
если $EX=5$, $EY=4$.

1690. X — нормальная случайная величина с $a=0$, $\sigma=1$. Найти $P(|X|<n)$ и оценить эту величину, пользуясь неравенством Маркова.

1691. Пусть X — число выпадений герба при 10 подбрасываниях пятикопеечной монеты, а Y — число выпавших очков при бросании игральной кости. Пользуясь неравенством Маркова, оценить снизу вероятность осуществления неравенства

$$X+Y<14.$$

§ 2. Неравенство Чебышева

Каково бы ни было $\varepsilon>0$ для любой случайной величины X, дисперсия которой конечна, имеет место

$$P(|X-EX|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

1692. Электростанция обслуживает сеть с 18 000 ламп, вероятность включения каждой из которых в зимний вечер равна 0,9. Какова вероятность того, что число ламп, включенных в сеть зимним вечером, отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 200?

Решение. Так как число включенных ламп X — это случайная величина, распределенная по биномиальному закону, то математическое ожидание этой случайной величины равно произведению числа всех независимых испытаний ($n = 18\,000$) на вероятность появления событий в отдельном испытании ($p = 0{,}9$), т. е. $EX = np = 18\,000 \cdot 0{,}9 = 16\,200$. Дисперсию X находим по формуле $DX = npq = 18\,000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 1620$ ($q = 1 - p$).

Неравенство Чебышева дает оценку снизу вероятности выполнения неравенства $|X - EX| \leqslant 200$, т. е.

$$P(|X - EX| \leqslant 200) \geqslant 1 - \frac{DX}{200^2} = 1 - \frac{1620}{40\,000} = 1 - 0{,}045 = 0{,}955.$$

Точное значение этой вероятности находим, пользуясь интегральной теоремой Лапласа:

$$P(|X - EX| \leqslant 200) = \Phi\left(\frac{200}{\sqrt{1620}}\right) = \Phi(4{,}97) = 1$$

(здесь $\Phi(t)$ — функция Лапласа).

1693. Распределение случайной величины X дается следующей таблицей:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0,05	0,10	0,25	0,30	0,20	0,10

Чему равна вероятность того, что $|X - EX| < 2$? Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

Решение. Сначала находим математическое ожидание и дисперсию случайной величины X:

$$EX = 1 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}10 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}30 + 5 \cdot 0{,}20 + 6 \cdot 0{,}10 = 3{,}80;$$

$$EX^2 = 1^2 \cdot 0{,}05 + 2^2 \cdot 0{,}10 + 3^2 \cdot 0{,}25 + 4^2 \cdot 0{,}30 + 5^2 \cdot 0{,}20 + 6^2 \cdot 0{,}10 = 16{,}10;$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 16{,}10 - 14{,}44 = 1{,}66.$$

Чтобы найти $P(|X - EX| < 2)$, надо знать те значения X, которые удовлетворяют неравенству $|X - EX| < 2$: $|X - 3{,}8| < 2$, $-2 < X - 3{,}8 < 2$, $1{,}8 < X < 5{,}8$. Этим неравенствам удовлетворяют только такие значения X: 2, 3, 4 и 5. Отсюда

$$P(|X - 3{,}8| < 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}85.$$

Пользуясь неравенством Чебышева, можно получить оценку данной вероятности снизу. Для этого подставим в неравенство

$P(|X-EX|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ найденные ранее значения EX, DX и $\varepsilon=2$. Тогда

$$P(|X-3{,}8|<2)\geqslant 1-\frac{1{,}66}{4}=0{,}585.$$

1694. Среднее значение длины детали 50 *см*, а дисперсия 0,1. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не меньше 49,5 *см* и не больше 50,5 *см*.

Решение. Пусть X — длина случайно взятой детали. Из условия задачи следует, что $EX=50$, а $DX=0{,}1$. Требуется оценить снизу величину $P(49{,}5<X<50{,}5)$. Так как неравенства $49{,}5<X<50{,}5$ равносильны неравенству $|X-50|<0{,}5$, то необходимо оценить $P(|X-50|<0{,}5)$. Но это есть левая часть неравенства Чебышева, поскольку $EX=50$. Отсюда

$$P(|X-50|<0{,}5)\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}=1-\frac{0{,}1}{(0{,}5)^2}=0{,}6.$$

1695. Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет не более трех средних квадратических отклонений (правило трех сигм).

1696. В партии содержится n изделий, изготовленных на первом станке, и m изделий, изготовленных на втором станке. Оценить снизу вероятность того, что число первосортных изделий в партии отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине меньше, чем на ε, если вероятности изготовления первосортных изделий для указанных станков соответственно равны r и s.

1697. X — случайная величина с плотностью распределения

$$p(x)=e^{-2|x|}.$$

Найти $P(|X|<n)$ и оценить снизу эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

1698. Распределение случайной величины X дается следующей таблицей:

x	-1	0	2	4	6
$p(x)$	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Чему равна вероятность того, что $|X-EX|<5$? Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

1699. Вероятность выпуска нестандартной радиолампы равна 25%. Оценить снизу вероятность того, что в партии из 1000 радиоламп число нестандартных отличается от 250 меньше чем на 40.

1700. Оценить вероятность того, что число лиц, имеющих высшее образование, в группе из 800 человек отличается от своего математического ожидания меньше чем на 30.

§ 3. Теорема Чебышева

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих дисперсии, которые ограничены одной и той же постоянной C. Тогда, каково бы ни было постоянное положительное число ε,

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{EX_1+EX_2+\ldots+EX_n}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n}DX_i}{n^2\varepsilon^2}\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2} \qquad (1)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Если $EX_1=EX_2=\ldots=EX_n=a$, то теорема Чебышева принимает вид

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Отсюда видно, что в этом случае среднее арифметическое случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (случайная величина) при большом n как угодно мало отличается от постоянной величины a.

1701. Для определения средней продолжительности горения электроламп в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить снизу вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения во всей партии по абсолютной величине меньше чем на 5 *ч*, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 *ч*.

Решение. Пусть X_i — продолжительность горения электролампы, взятой из i-го ящика. В задаче дано, что $DX_i<7^2=$

$= 49$. Очевидно, что средняя продолжительность горения лампы в выборке

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{200}}{200},$$

а средняя продолжительность горения лампы во всей партии

$$\frac{EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{200}}{200}.$$

Надо оценить снизу вероятность

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{200}}{200} - \frac{EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{200}}{200}\right| < 5\right).$$

Это есть левая часть неравенства (1). Так как X_1, X_2, ..., X_{200} — независимые случайные величины, то эта вероятность оценивается снизу правой частью неравенства (1), где следует положить $C = 49$, $\varepsilon = 5$, $n = 200$. Итак, искомая вероятность

$$P \geqslant 1 - \frac{49}{200 \cdot 25} = 1 - \frac{49}{5000} = 1 - 0{,}0098 = 0{,}9902.$$

1702. Сколько раз нужно измерить данную величину, истинное значение которой равно a, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,95, можно было утверждать, что среднее арифметическое значение этих измерений отличается от a по абсолютной величине меньше чем на 2, если среднее квадратическое отклонение каждого из измерений меньше 10?

Решение. Пусть X_i — результат i-го измерения. Из условия задачи следует, что $EX_i = a$, $DX_i < 10^2 = 100$. Поэтому

$$\frac{EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n}{n} = \frac{a + a + \ldots + a}{n} = a.$$

Требуется найти n, при котором

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < 2\right) \geqslant 0{,}95.$$

Так как

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

где $C = 100$, $\varepsilon = 2$, то предыдущее неравенство во всяком случае будет выполняться, если

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \geqslant 0{,}95.$$

Отсюда

$$1 - \frac{100}{n \cdot 2^2} \geqslant 0{,}95; \quad 0{,}05 \geqslant \frac{100}{n \cdot 4}; \quad n \geqslant \frac{100}{4 \cdot 0{,}05} = 500.$$

1703. Выяснить, применима ли теорема Чебышева к последовательности независимых случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, ..., если X_n имеет следующее распределение:

x	$-5n$	0	$5n$
$p(x)$	$\frac{1}{3n^2}$	$1-\frac{2}{3n^2}$	$\frac{1}{3n^2}$

Решение. Теорема Чебышева применима к последовательности случайных величин X_n, если существует такая постоянная C, что $DX_n < C$ для любого n. Проверим это:

$$EX_n = -5n\cdot\frac{1}{3n^2} + 0\cdot\left(1-\frac{2}{3n^2}\right) + 5n\cdot\frac{1}{3n^2} = 0;\ EX_n^2 =$$

$$= (-5n)^2\cdot\frac{1}{3n^2} + (0)^2\left(1-\frac{2}{3n^2}\right) + (5n)^2\cdot\frac{1}{3n^2} = \frac{25}{3} + \frac{25}{3} =$$

$$= \frac{50}{3};\ DX_n = \frac{50}{3}.$$

Таким образом, C существует (в качестве последнего можно взять $\frac{50}{3}$) и к последовательности $\{X_n\}$ применима теорема Чебышева.

1704. Для определения средней урожайности совхозного поля в 5000 *га* предлагается взять на выборку по 1 $м^2$ с каждого гектара площади и точно подсчитать урожайность с этих квадратных метров. Оценить вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от истинной средней урожайности на всем массиве не более чем на 0,2 *ц*, если предположить, что среднее квадратическое отклонение урожайности на каждом гектаре не превышает 5 *ц*.

1705. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднее квадратическое отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 1 *см*, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,1 *см*.

1706. Известно, что дисперсия каждой из данных независимых случайных величин не превышает 4. Определить число таких величин, при котором вероятность отклонения средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не более чем на 0,25 превысит 0,99.

1707. Сколько должно быть произведено независимых измерений некоторой величины, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,98, можно было утверждать, что среднее арифметическое результатов измерений отличается от истинного значения по

абсолютной величине меньше чем на 0,01, если дисперсия отдельного результата измерения не превосходит 1?

1708. Для установления среднего размера детали в партии, размещенной в 100 ящиках с одинаковым количеством деталей в каждом, взяли по одной детали из каждого ящика. Вычислить верхний предел отклонения среднего размера детали в отобранной совокупности от среднего ее размера во всей партии, если результат необходимо гарантировать с вероятностью, не меньшей чем 0,8, а дисперсия размера по каждому ящику не превышает 6.

1709. Дисперсия каждой из 800 независимых случайных величин не превышает 9. Какой должна быть верхняя граница абсолютной величины отклонения средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий, чтобы вероятность такого отклонения превышала 0,997?

1710. Выяснить, применима ли теорема Чебышева к последовательности независимых случайных величин $\{X_n\}$, если таблица распределения X_n имеет вид:

1)

x	$-n^2$	0	n^2
$p(x)$	2^{-n}	$1-2^{1-n}$	2^{-n}

2)

x	$-n^\alpha$	0	n^α
$p(x)$	α^{-n}	$1-2\alpha^{-n}$	α^{-n}

$(\alpha > 1)$

1711. Доказать следующую теорему Маркова.

Если $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} DX_i = 0,$$

то с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, можно ожидать, что средняя арифметическая этих случайных величин отличается от средней арифметической их математических ожиданий по абсолютной величине не более, чем на любое положительное ε, если только число случайных величин достаточно велико.

1712. Выяснить, применима ли теорема Маркова к последовательности независимых случайных величин $\{X_n\}$, если распределение случайной величины X_n определяется таблицей:

1)

x	$-\ln n$	$\ln n$
$p(x)$	0,5	0,5

2)

x	$-\sqrt{n}\ln n$	$\sqrt{n}\ln n$
$p(x)$	0,5	0,5

§ 4. Теорема Пуассона

Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления события A в i-м испытании p_i, а m — число появлений события при n испытаниях, то

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P_i\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)}{n^2\varepsilon^2}\geqslant 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

каково бы ни было постоянное число $\varepsilon>0$. Отсюда следует равенство

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=1,$$

которое и выражает теорему Пуассона.

1713. Проведено 800 независимых испытаний: в 200 из них вероятность появления ожидаемого результата была 0,5 в 400 испытаниях эта вероятность была 0,4, и, наконец, в оставшихся случаях вероятность благоприятствующего исхода была равна 0,3. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частости появления ожидаемого результата от средней вероятности по абсолютной величине не превысит 0,04.

Решение. Сначала находим среднюю вероятность наступления события в 800 испытаниях. Если через p_i обозначить вероятность наступления в i-м испытании, то

$$\bar{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i=\frac{1}{800}\cdot(0{,}5\cdot 200+0{,}4\cdot 400+0{,}3\cdot 200)=\frac{3{,}2}{8}=0{,}4.$$

В задаче требуется оценить снизу вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}4\right|<0{,}04\right).$$

Пользуясь теоремой Пуассона, находим искомую оценку

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}4\right|<0{,}04\right)\geqslant 1-\frac{0{,}5\cdot(1-0{,}5)\cdot 200+0{,}4\cdot 0{,}6\ 400+0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 200}{800^2\cdot(0{,}04)^2}=$$
$$=0{,}817.$$

1714. Изнашивание станка при изготовлении некоторых деталей таково, что производство каждой детали уменьшает вероятность выпуска детали высшего сорта на 1%. Что можно сказать на основании теоремы Пуассона с вероятностью, не меньшей 0,8, о числе деталей высшего сорта в партии из 100 деталей, изготовленных на одном станке, если вероятность того, что первая из них высшего сорта, равна 0,9?

Решение. Если вероятность того, что деталь, изготовленная i-й на данном станке, окажется высшего сорта, обозначить через p_i, то

$$p_1=0{,}9;\ p_2=0{,}9-0{,}9\cdot 0{,}01=0{,}9\cdot 0{,}99;\ p_3=0{,}9\cdot 0{,}99-$$
$$-0{,}9\cdot 0{,}99\cdot 0{,}01=0{,}9\cdot(0{,}99)^2;\ \ldots;\ p_i=0{,}9\cdot(0{,}99)^{i-1};\ \ldots;\ p_{100}=$$
$$=0{,}9\cdot(0{,}99)^{99};$$

$$\bar{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}0{,}9\cdot(0{,}99)^{i-1}=\frac{0{,}9}{100}\cdot\frac{1-(0{,}99)^{100}}{1-0{,}99}=\frac{0{,}9}{100}\times$$
$$\times\frac{1-0{,}3665}{0{,}01}=0{,}570;$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)=\sum_{i=1}^{100}0{,}9\cdot(0{,}99)^{i-1}\cdot[1-0{,}9\cdot(0{,}99)^{i-1}]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}0{,}9\cdot(0{,}99)^{i-1}-\sum_{i=1}^{100}(0{,}9)^2(0{,}99)^{2(i-1)}=0{,}9\cdot\frac{1-(0{,}99)^{100}}{1-0{,}99}-$$
$$-(0{,}9)^2\cdot\frac{1-(0{,}99)^{200}}{1-(0{,}99)^2}=21{,}39.$$

Поэтому в нашем случае неравенство теоремы Пуассона принимает вид

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}570\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{21{,}39}{\varepsilon^2\cdot 100^2}.$$

Если ε выбрать таким, что $1-\frac{21{,}39}{\varepsilon^2\cdot 100^2}=0{,}8$, то вероятность $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}570\right|<\varepsilon\right)$ будет не меньше 0,8. Из написанного выше уравнения находим:

$$0{,}2=\frac{21{,}39}{100^2\cdot\varepsilon^2};\ \varepsilon^2=\frac{21{,}39}{0{,}2\cdot 100^2}=0{,}0107;\ \varepsilon=0{,}103.$$

Таким образом, с вероятностью, не меньшей чем 0,8, можем утверждать, что

$$\left|\frac{m}{n}-0{,}57\right|<0{,}103;\ |m-57|<10{,}3;\ 46{,}7<m<67{,}3,$$

т. е. число деталей высшего сорта заключено между 47 и 67.

1715. Проведено 600 независимых испытаний: в 200 из них вероятность появления события A была равна 0,3, а в остальных случаях эта вероятность равна 0,5. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частости от средней вероятности не превысит по абсолютной величине 0,05.

1716. Стрельба по цели ведется поочередно из трех орудий, причем вероятности попадания в цель равны соответственно 0,2, 0,3 и 0,5. Таким образом произведено 300 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что при этом частость отличается от средней вероятности попадания по абсолютной величине не более чем на 0,1.

1717. Определить число испытаний, которые нужно провести, чтобы отклонение частости появления события A от его средней вероятности в проведенных испытаниях не превышало по абсолютной величине 0,02 с вероятностью 0,99.

1718. Из 4000 проведенных испытаний в 500 вероятность появления ожидаемого результата 0,4, в 1200—0,5 и в 2300—0,6. Найти границы, в которых должна находиться частость появления ожидаемого результата, если это необходимо гарантировать с вероятностью 0,98.

1719. Доказать, что если при каждом из независимых испытаний событие A имеет одну и ту же вероятность p, то, каково бы ни было положительное число ε,

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\geqslant 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

где n — число независимых испытаний; m — частота наступления события при n испытаниях; $q=1-p$.

1720. Вероятность положительного исхода отдельного испытания $p=0{,}8$. Оценить вероятность того, что при 1000 независимых повторных испытаний отклонение частости положительных исходов от вероятности при отдельном испытании по своей абсолютной величине будет меньше 0,05.

1721. Вероятность наличия зазубрины на металлических брусках, заготовленных для обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 5%.

1722. Сколько следует провести независимых испытаний, чтобы вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}06$ пре-

высила 0,78, если вероятность появления данного события в отдельном испытании $p = 0{,}7$?

1723. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы с вероятностью не меньше чем 0,997 можно было утверждать, что частость выпадения герба будет между 0,499 и 0,501?

1724. Всхожесть семян кукурузы в некоторых условиях равна 93%. Найти границы для частости взошедших семян из 1000 посеянных, если эти границы надо гарантировать с вероятностью, не меньшей 0,99.

1725. Пусть вероятность того, что покупателю обувного магазина необходимы туфли размера 41, равна 0,15. Оценить границы процента покупателей среди 2000 побывавших в магазине, которым нужны такие туфли, если эти границы надо гарантировать с вероятностью 0,98.

Глава XVI Статистические распределения

§ 1. Дискретный и интервальный ряды распределения. Полигон и гистограмма

Статистической совокупностью называют множество однородных предметов или явлений. Отдельные элементы, входящие в совокупность, называются *членами статистической совокупности*, а общее число членов совокупности — ее *объемом*.

Пусть у данной статистической совокупности изучается некоторый признак, который, вообще говоря, изменяется при переходе от одного члена статистической совокупности к другому. Изменение этого признака называют его *вариацией*, а значение признака у данного члена статистической совокупности — его *вариантой*.

Если произвести группировку вариант по отдельным значениям признака *(дискретная группировка)* или по интервалам изменения признака *(интервальная группировка)* и результат группировки представить рядом вариант или интервалов вариации, расположенных в порядке их возрастания, и рядом соответствующих частот, то получим *вариационный ряд* (соответственно *дискретный* или *интервальный*).

Под *частотой значения признака* или *интервала* понимают число членов совокупности с данной вариантой или соответственно число членов совокупности, варианты которых лежат в данном интервале.

Отношение частоты к объему совокупности называется *относительной частотой* или *частостью*.

Очевидно, вариационный ряд может быть охарактеризован не только частотой, но и частостью.

Для определения числа равных интервалов k, на которые следует разбить весь диапазон значений признака X $[x_{\min}, x_{\max}]$, можно пользоваться формулой

$$k = \log_2 n + 1,$$

где n — объем статистической совокупности. При этом следует учитывать, что число интервалов должно быть не меньше 8—10 и не больше 20—25, $n \geqslant 50$.

Для наглядного представления статистического распределения пользуются графическим изображением вариационных рядов (полигоном, гистограммой, кумулянтой и огивой).

Для построения полигона вариационного ряда на оси абсцисс прямоугольной системы координат откладывают интервалы значений признака (отдельные значения признака в случае дискретного распределения), в серединах интервалов восстанавливают перпендикуляры, длины которых пропорциональны соответствующим частотам, затем концы соседних перпендикуляров соединяют отрезками прямых, а концы крайних перпендикуляров соединяют с серединами соседних интервалов, частоты которых равны нулю. В результате получим замкнутую фигуру в виде многоугольника, называемую *полигоном*.

Для графического изображения интервального вариационного ряда пользуются *гистограммой*, построение которой осуществляется таким образом. На оси абсцисс откладывают интервалы значений признака, и на каждом из них, как на основании, строят прямоугольник с высотой, пропорциональной частоте интервала.

1726. Построить дискретный вариационный ряд и начертить полигон для следующего распределения 45 пар мужской обуви, проданных магазином за день:

39	41	40	42	41	40	42	44	40	43	42	41	43
39	42	41	42	39	41	37	43	41	38	43	42	41
40	41	38	44	40	39	41	40	42	40	41	42	40
43	38	39	41	41	42							

Решение. Для построения вариационного ряда различные значения признака располагаем в порядке их возрастания и под каждым из этих значений записываем его частоту. Для удобства подсчета частоты пользуются следующими обозначениями:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

В нашем случае

37	38	39	40	41	42	43	44

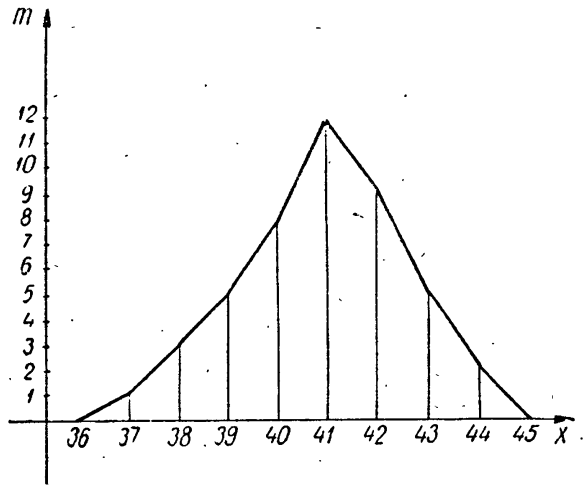


Рис. 99

Окончательно вариационный ряд принимает вид:

37	38	39	40	41	42	43	44
1	3	5	8	12	9	5	2

Полигон этого распределения изображен на рис. 99.

1727. Через каждый час измерялось напряжение тока в электросети. При этом были получены следующие значения (в *в*):

227 219 215 230 232 223 220 222 218 219 222 221 227 226
226 209 211 215 218 220 216 220 220 221 225 224 212 217
219 220

Построить статистическое распределение и начертить полигон.

1728. Построить дискретный вариационный ряд и начертить полигон распределения 60 абитуриентов по числу баллов, полученных ими на приемных экзаменах:

20 19 22 24 21 18 23 17 20 16 15 23 21 24 21 18
23 21 19 20 24 21 20 18 17 22 20 16 22 18 20 17
21 17 19 20 20 21 18 22 23 21 25 22 20 19 21 24
23 21 19 22 21 19 20 23 22 25 21 21

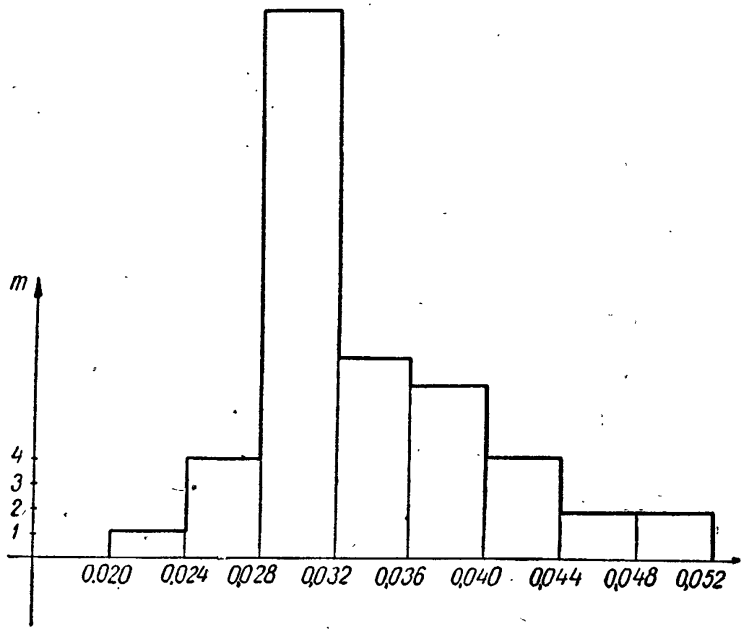


Рис. 100

1729. Наблюдения за толщиной (в *мм*) 50 слюдяных прокладок дали следующие результаты:

0,021 0,030 0,039 0,031 0,042 0,034 0,036 0,030 0,028
0,030 0,033 0,024 0,031 0,040 0,031 0,033 0,031 0,027
0,031 0,045 0,031 0,034 0,027 0,030 0,048 0,030 0,028
0,030 0,033 0,046 0,043 0,030 0,033 0,028 0,031 0,027
0,031 0,036 0,051 0,034 0,031 0,036 0,034 0,037 0,028
0,030 0,039 0,031 0,042 0,037

Построить по этим данным интервальный вариационный ряд с равными интервалами (первый интервал 0,020—0,024, второй — 0,024—0,028 и т. д.) и начертить гистограмму.

Решение. Для построения вариационного ряда составим таблицу, в первом столбце которой расположим в порядке возрастания интервалы, а во втором займемся подсчетом соответствующих частот:

Интервал	0,020—0,024	0,024—0,028	0,028—0,032	0,032—0,036
Частота	1	4	22	8

Интервал	0,036—0,040	0,040—0,044	0,044—0,048	0,048—0,052
Частота	7	4	2	2

Гистограмма этого распределения изображена на рис. 100.

1730. Наблюдения за процентом жира в молоке 50 коров дали такие результаты:

3,86	4,06	3,67	3,97	3,76	3,61	3,96	4,04	3,84	3,94
3,98	3,57	3,87	4,07	3,99	3,69	3,76	3,71	3,94	3,82
4,16	3,76	4,00	3,46	4,08	3,88	4,01	3,93	3,71	3,81
4,02	4,17	3,72	4,09	3,78	4,02	3,73	3,52	3,89	3,92
4,18	4,26	4,03	4,14	3,72	4,33	3,82	4,03	3,62	3,91

Построить по этим данным интервальный вариационный ряд с равными интервалами (первый интервал 3,45—3,55%, второй 3,55—3,65% и т. д.) и изобразить его графически.

§ 2. Кумулятивный ряд. Плотность распределения признака. Кумулянта и огива

Накопленной частостью (частотой) в точке x называют суммарную частость (частоту) членов статистической совокупности со значениями признака, меньшими чем x.

Если в вариационном ряду вместо частот или частостей записать соответственно накопленные частоты или частости, то получится *кумулятивный ряд*.

Пусть $\gamma(x)$ — накопленная частость в точке x.

Величину $\frac{\gamma(x+\Delta x)-\gamma(x)}{\Delta x}$ называют *средней плотностью распределения* частости признака на полуинтервале $[x, x+\Delta x)$ или $[x+\Delta x, x)$.

Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma(x+\Delta x)-\gamma(x)}{\Delta x} = \gamma'(x)$, то последний называют *плотностью распределения* частости признака в точке x.

Говорят, что признак X в данной статистической совокупности распределен по нормальному закону, если плотность его распределения определяется по формуле (1) § 2 гл. XIV.

Для графического изображения кумулятивных рядов пользуются кумулянтами и огивами.

Кумулянта строится следующим образом: на оси абсцисс отмечают точки, соответствующие границам интервалов или значениям признака, и в каждой такой точке восстанавливают перпендикуляр, длина которого пропорциональна накопленной частости, концы соседних перпендикуляров соединяют отрезками. Полученная ломаная линия называется *кумулянтой*.

Если на горизонтальной оси откладывать накопленные частости, а на вертикальной — значения признака, то полученная при этом кривая носит название *огивы*.

1731. Для определения крепости нити проведены испытания 1000 проб, давшие следующие результаты:

Крепость нити, *г*	180—190	190—200	200—210	210—220	220—230	230—240	240—250
Число проб	50	90	150	280	220	120	90

Построить кумулятивный ряд и начертить кумулянту и огиву.

Решение. Сначала находим накопленные частоты для каждого из интервалов данного интервального вариационного ряда:

$\gamma_1 = \gamma(190) = m_1 = 50$; $\gamma_2 = \gamma(200) = m_1 + m_2 = 50 + 90 = 140$;
$\gamma_3 = 290$; $\gamma_4 = 570$; $\gamma_5 = 790$; $\gamma_6 = 910$; $\gamma_7 = 1000$.

Таким образом, кумулятивный ряд для данного распределения имеет вид:

180—190	190—200	200—210	210—220	220—230	230—240	240—250
50	140	290	570	790	910	1000

Соответствующая кумулянта изображена на рис. 101, *а*, а огива — на рис. 101, *б*.

1732. Построить кумулятивный ряд и начертить кумулянту и огиву статистического распределения, приведенного в задаче 1729.

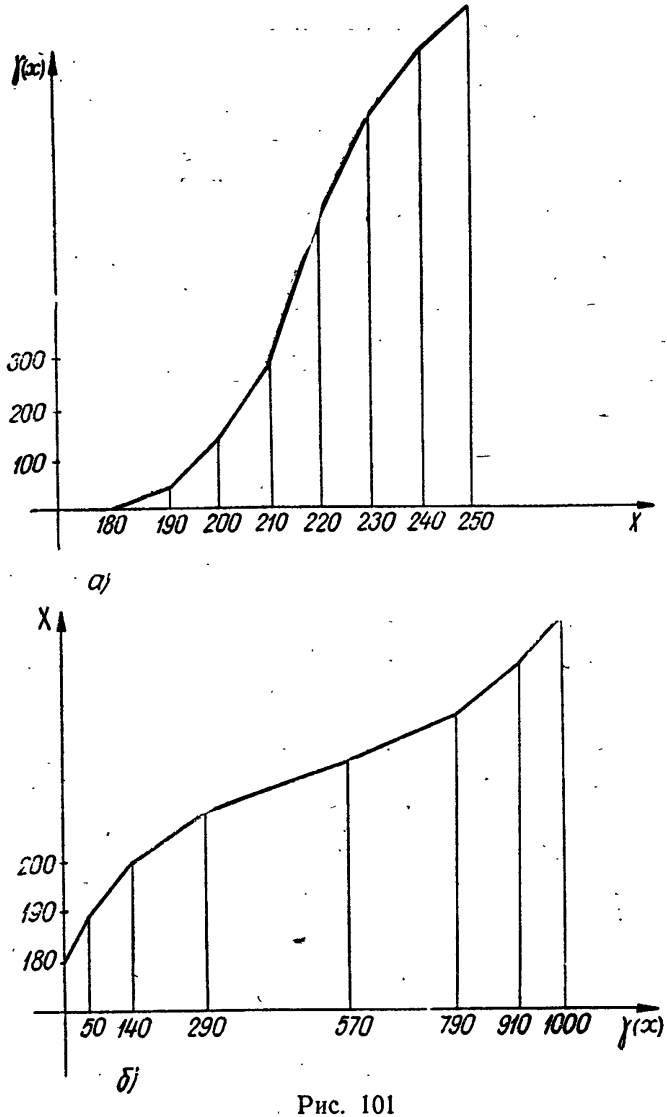


Рис. 101

1733. Данные об урожайности ржи на различных участках колхозного поля приведены в следующей таблице:

Урожайность ржи, *ц/га*	9—12	12—15	15—18	18—21	21—24	24—27
Доля участка от общей посевной площади, %	6	12	33	22	19	8

Построить кумулятивный ряд и начертить кумулянту и огиву.

§ 3. Мода и медиана

Мода — это наиболее часто встречающееся значение признака в данном ряду распределения.

Для дискретных вариационных рядов мода определяется как значение признака с наибольшей частотой.

В случае непрерывной вариации мода может быть определена как значение признака, которому отвечает наибольшая плотность распределения частости.

Если $X_k' - X_k''$ — модальный интервал, т. е. интервал, которому соответствует наибольшая частота m_k, а интервалы вариационного ряда имеют постоянную ширину h, то мода признака X вычисляется по формуле

$$M_0X = X_k' + h \cdot \frac{m_k - m_{k-1}}{(m_k - m_{k-1}) + (m_k - m_{k+1})},$$

где m_{k-1} и m_{k+1} — частоты, находящиеся в соответствии с интервалами, предшествующими модальному и следующим за ним.

Медианой M_eX называется значение признака, относительно которого статистическая совокупность делится на две равные по объему части, причем в одной из них содержатся члены, у которых значения признака не больше чем M_eX, а в другой — члены со значениями признака не меньше чем M_eX.

Для дискретного распределения медиана находится непосредственно на основании определения.

Если же распределение интервальное, то сначала находят так называемый медианный интервал $X_s' - X_s''$, номер которого вычисляют из неравенств

$$\gamma(X_s') \leqslant 0{,}5, \quad \gamma(X_s'') > 0{,}5,$$

где $\gamma(x)$ — накопленная частость в точке x. При предположении, что в медианном интервале признак распределен равномерно, медиана признака X определяется по формуле

$$M_eX = X_s' + h \cdot \frac{0{,}5 - \gamma(X_s')}{\gamma(X_s'') - \gamma(X_s')} = X_s' + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - \tilde{\gamma}(X_s')}{m_s},$$

где h — ширина s-го интервала; n — объем статистической совокупности; $\tilde{\gamma}(X_s')$ — накопленная частота до s-го интервала; m_s — частота s-го интервала.

1734. Обследование качества пряжи на крепость дало следующие результаты:

Крепость нити, *г*	120—140	140—160	160—180	180—200
Число случаев	1	6	19	58

Крепость нити, *г*	200—220	220—240	240—260	260—280
Число случаев	53	24	16	3

Найти моду и медиану этого распределения.

Решение. Так как наибольшая частота $m_k = 58$ отвечает интервалу 180—200, то $X'_k = 180$, $m_{k-1} = 19$, $m_{k+1} = 53$ и

$$M_0X = 180 + 20 \cdot \frac{58 - 19}{(58 - 19) + (58 - 53)} = 180 + 17{,}73 = 197{,}73.$$

Для нахождения медианы строим кумулятивный ряд:

1	2	3	4	5	6	7	8
120—140	140—160	160—180	180—200	200—220	220—240	240—260	260—280
1	7	26	84	137	161	177	180

Номер медианного интервала s определяется из неравенств

$$\gamma(X'_s) \leqslant 0{,}5, \quad \gamma(X''_s) > 0{,}5$$

или, что то же самое,

$$\tilde{\gamma}(X'_s) \leqslant \frac{n}{2}, \quad \tilde{\gamma}(X''_s) > \frac{n}{2}.$$

В нашем случае $\frac{n}{2} = \frac{180}{2} = 90$, $\tilde{\gamma}(X'_5) = 84 \leqslant 90$ и $\tilde{\gamma}(X''_5) = 137 > 90$. Поэтому медианным интервалом является 200—220, а

$$M_eX = X'_s + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - \tilde{\gamma}(X'_s)}{m_s} = 200 + 20 \cdot \frac{90 - 84}{53} = 202{,}26.$$

1735. Найти моду и медиану распределения, приведенного в задаче 1728.

1736. Ниже приводится распределение роста 1000 взрослых мужчин:

Рост, *см*	Число мужчин	Рост, *см*	Число мужчин
143—146	1	167—170	170
146—149	2	170—173	120
149—152	8	173—176	64
152—155	26	176—179	28
155—158	65	179—182	10
158—161	120	182—185	3
161—164	181	185—188	1
164—167	201		

Найти моду и медиану этого распределения.

§ 4. Среднее арифметическое и степенные средние

Дано распределение признака X:

Варианта	x_1	x_2	. . .	x_l	. . .	x_n
Частота	m_1	m_2	. . .	m_l	. . .	m_n

Тогда *средним арифметическим* этого признака называют величину

$$\overline{X} = \frac{\sum_{l=1}^{n} m_l x_l}{\sum_{l=1}^{n} m_l}.$$

Имеет место равенство

$$\overline{X} = k\overline{U} + x_0,$$

где $U = \frac{X - x_0}{k}$ (k и x_0 — любые действительные числа, причем $k \neq 0$). Умелый подбор k и x_0 значительно облегчает нахождение среднего арифметического.

Величина $\overline{X}_k = \sqrt[k]{\overline{X^k}}$ называется *степенным средним* k-го порядка признака X.

При $k = 1$ степенное среднее становится средним арифметическим. $\overline{X}_2$ называется *средним квадратическим*, $\overline{X}_3$ — *средним кубическим*, $\overline{X}_{-1}$ — *средним гармоническим* (в этом случае все $x_i > 0$). Существует также степенное среднее, соответствующее

значению $k = 0$. Оно называется *средним геометрическим* и вычисляется по формуле

$$G = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} m_i]{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}} \quad (x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$G = \lim_{k \to 0} \overline{X}_k \quad \text{(докажите это).}$$

1737. Пусть на молочной ферме колхоза имеются сведения о величине удоя коров за лактационный период:

Величина удоя, *кг*	Количество коров	Величина удоя, *кг*	Количество коров
400—600	1	1600—1800	14
600—800	3	1800—2000	12
800—1000	6	2000—2200	10
1000—1200	11	2200—2400	6
1200—1400	15	2400 и выше	2
1400—1600	20		

Найти среднее арифметическое удоя коров на данной ферме.

Решение. Среднее арифметическое найдем по упрощенной формуле

$$\overline{X} = k\overline{U} + x_0 \quad \left(U = \frac{X - x_0}{k}\right),$$

положив $x_0 = 1500$ и $k = 200$. Все необходимые вычисления приведены в следующей таблице:

Интервал $X_i' - X_i''$	Частота m_i	Середина интервала x_i	$u_i = \frac{x_i - x_0}{k}$	$m_i u_i$
400—600	1	500	—5	— 5
600—800	3	700	—4	—12
800—1000	6	900	—3	—18
1000—1200	11	1100	—2	—22
1200—1400	15	1300	—1	—15
1400—1600	20	1500	0	0
1600—1800	14	1700	1	14
1800—2000	12	1900	2	24
2000—2200	10	2100	3	30
2200—2400	6	2300	4	24
2400 и выше	2	2500	5	10
Сумма	100			30

$$\overline{U} = \frac{30}{100} = 0{,}3, \quad \overline{X} = k\overline{U} + x_0 = 200 \cdot 0{,}3 + 1500 = 1560.$$

1738. Найти среднее арифметическое распределения, приведенного в задаче 1736.

1739. Доказать, что среднее арифметическое любого распределения не больше его среднего квадратического.

1740. Автомашина пришла из Минска в Могилев со скоростью 40 *км/ч* и сразу же повернула обратно. Скорость ее на обратном пути была на 20 *км/ч* больше. Найти среднюю скорость.

1741. Доказать, что среднее гармоническое меньше или равно среднему арифметическому: $\overline{X}_{-1} \leqslant \overline{X}$.

1742. Доказать, что если ряд состоит из двух вариант, то G можно рассматривать как среднее геометрическое среднего арифметического и среднего гармонического: $G = \sqrt{\overline{X}_{-1}\,\overline{X}}$.

1743. Пусть имеется распределение признака X, которое задается таблицей, приведенной в начале данного параграфа ($x_i > 0$). Доказать, что $\overline{X}_k$ монотонно неубывающая функция от k и всегда $\min\limits_i x_i \leqslant \overline{X}_k \leqslant \max\limits_i x_i$.

1744. Если все варианты x_i признака X положительны, то его степенное среднее $\overline{X}_k$ возрастает с увеличением показателя k, т. е. $\overline{X}_s \leqslant \overline{X}_l$, если $s < l$. В частности, между средними гармоническим, геометрическим, арифметическим, квадратическим и кубическим существуют следующие соотношения: $\overline{X}_{-1} \leqslant G \leqslant \overline{X} \leqslant \overline{X}_2 \leqslant \overline{X}_3$. Проверить выполнение этих неравенств для распределения:

Значение признака	1	2	3	4	5
Частота	2	3	5	2	1

§ 5. Меры рассеивания

За *меру рассеивания* значений признака X по отношению к его среднему арифметическому принимают величину

$$DX = \overline{(X - \overline{X})^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},$$

называемую *дисперсией*.

Средним квадратическим отклонением σ признака X называют корень квадратный из его дисперсии, т. е. $\sigma = \sqrt{DX}$.

Отношение среднего квадратического отклонения к средней величине признака, выраженное в процентах, называется *коэффициентом вариации* v. Таким образом,

$$v = \frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\%.$$

Разность между наибольшим и наименьшим значениями признака называют *размахом вариации:*

$$R = X_{\max} - X_{\min}.$$

1745. Доказать, что дисперсия признака X может быть вычислена по формуле

$$DX = k^2 \overline{\left(\frac{X-a}{k}\right)^2} - (\overline{X}-a)^2.$$

Доказательство. $k^2 \overline{\left(\frac{X-a}{k}\right)^2} - (\overline{X}-a)^2 = k^2 \cdot \frac{1}{k^2} \times$

$$\times \overline{(X-a)^2} - (\overline{X}-a)^2 = \overline{[(X-\overline{X}) + (\overline{X}-a)]^2} - (\overline{X}-a)^2 =$$

$$= \overline{(X-\overline{X})^2} + 2\overline{(X-\overline{X})(\overline{X}-a)} + (\overline{X}-a)^2 - (\overline{X}-a)^2 = DX +$$

$$+ 2(\overline{X}-\overline{X})(\overline{X}-a) = DX.$$

1746. Найти дисперсию, коэффициент вариации и размах вариации признака, распределение которого приведено в задаче 1733.

Решение. Дисперсию признака будем находить, пользуясь формулой, полученной в предыдущей задаче. При этом положим $a = 16{,}5$; $k = 3$. Все необходимые вычисления приводятся в следующей таблице:

$X_i' - X_i''$	m_i	$x_i = \frac{X_i' + X_i''}{2}$	$u_i = \frac{x_i - a}{k}$	$u_i m_i$	$u_i^2 m_i$
9—12	6	10,5	—2	—12	24
12—15	12	13,5	—1	—12	12
15—18	33	16,5	0	0	0
18—21	22	19,5	1	22	22
21—24	19	22,5	2	38	76
24—27	8	25,5	3	24	72
Сумма	100			60	206

$$\overline{X} = k\overline{U} + a = 3 \cdot \frac{60}{100} + 16{,}5 = 18{,}3;$$

$$DX = k^2\overline{U^2} - (\overline{X}-a)^2 = 3^2 \cdot \frac{206}{100} - (18{,}3 - 16{,}5)^2 = 15{,}3.$$

В нашем случае $\sigma = \sqrt{15{,}3} = 3{,}9$ и $\overline{X} = 18{,}3$, поэтому

$$v = \frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\% = \frac{3{,}9}{18{,}3} \cdot 100\% = 21{,}3\%;$$

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 27 - 9 = 18.$$

1747. Найти дисперсию, коэффициент вариации и размах вариации распределения, приведенного в задаче 1737.

1748. По некоторым данным средний вес коров $\overline{X} = 400$ *кг*, среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = 50$ *кг*, средний процент жира в молоке $\overline{Y} = 4\%$, а $\sigma_Y = 0{,}25\%$. Сравнить изменчивость веса коров и процента жира в их молоке.

1749. Найти коэффициент вариации и размах вариации распределения, приведенного в задаче 1736.

1750. Пусть статистическая совокупность разбита на p групп, причем объем j-й группы n_j, среднее арифметическое значение признака X в этой группе $\overline{X}_j$, а дисперсия σ_j^2. Доказать, что дисперсия признака X во всей статистической совокупности равна сумме среднего арифметического значения групповых дисперсий и дисперсии групповых средних, т. е.

$$DX = \frac{\sum_{j=1}^{p} n_j \sigma_j^2}{\sum_{j=1}^{p} n_j} + \frac{\sum_{j=1}^{p} n_j (\overline{X}_j - \overline{X})^2}{\sum_{j=1}^{p} n_j}.$$

§ 6. Моменты вариационного ряда

Моментом k-го порядка варьирующего признака X по отношению к значению a ($M_k(a)$) называют среднее арифметическое из k-х степеней отклонений значений признака от a, т. е.

$$M_k(a) = \overline{(X - a)^k}.$$

Если $a = 0$, момент называется *начальным* (ν_k), а при $a = \overline{X}$ его называют *центральным* (μ_k). Таким образом,

$$\nu_k = M_k(0) = \overline{X^k};$$

$$\mu_k = M_k(\overline{X}) = \overline{(X - \overline{X})^k}.$$

За показатель отклонения распределения признака X от симметрии относительно $\overline{X}$ принимают величину

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

называемую *асимметрией* (здесь σ — среднее квадратическое отклонение признака X).

Пределы значений асимметрии α от $-\infty$ до $+\infty$. При $\alpha = 0$ — распределение симметрично: $M_0X = \overline{X}$. При $\alpha > 0$ $M_0X < \overline{X}$, а при $\alpha < 0$, $M_0X > \overline{X}$.

Эксцессом называют величину

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Эксцесс показывает степень крутости кривой распределения признака X по сравнению с крутостью нормального распределения, дисперсия которого равна DX. При $\varepsilon = 0$ — распределение нормально. Если $\varepsilon > 0$, то крутость положительная и кривая распределения имеет более острую вершину, чем нормальное. Если же $\varepsilon < 0$, то крутость отрицательная и кривая имеет более плоскую вершину. В этом случае возможно даже, что в центре распределения будут выемки (двухмодальная кривая). Значения эксцесса лежат на полусегменте $[-3, +\infty)$.

1751. Найти выражение центрального момента третьего порядка через начальные моменты.

Решение. $\mu_3 = \overline{(X - \overline{X})^3} = \overline{X^3 - 3X^2\overline{X} + 3X(\overline{X})^2 - (\overline{X})^3} =$
$= \overline{X}^3 - 3\overline{X^2}\,\overline{X} + 3\overline{X}\,(\overline{X})^2 - (\overline{X})^3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$

1752. Найти выражение начального момента третьего порядка через центральные моменты.

1753. Доказать, что

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

1754. Доказать, что

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \nu_1^k \nu_{n-k}.$$

1755. Доказать, что

$$\nu_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \nu_1^k \mu_{n-k}.$$

1756. Дано распределение признака X:

x	-2	-1	0	1	2	3
m	2	4	6	5	2	1

Найти асимметрию и эксцесс.

Решение. Сначала находим начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков данного распределения:

x_i	m_i	$m_i x_i$	$m_i x_i^2$	$m_i x_i^3$	$m_i x_i^4$
−2	2	−4	8	−16	32
−1	4	−4	4	−4	4
0	6	0	0	0	0
1	5	5	5	5	5
2	2	4	8	16	32
3	1	3	9	27	81
Сумма	20	4	34	28	154

Отсюда

$$\nu_1 = \frac{4}{20} = 0{,}2; \quad \nu_2 = \frac{34}{20} = 1{,}7; \quad \nu_3 = \frac{28}{20} = 1{,}4; \quad \nu_4 = \frac{154}{20} = 7{,}7$$

и, следовательно,

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 1{,}7 - (0{,}2)^2 = 1{,}66;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 1{,}4 - 3\cdot 0{,}2\cdot 1{,}7 + 2\cdot(0{,}2)^3 = 0{,}40;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 = 7{,}7 - 4\cdot 0{,}2\cdot 1{,}4 + 6\cdot(0{,}2)^2\cdot 1{,}7 - 3\cdot(0{,}2)^4 = 6{,}17$$

(см. задачи 1761 и 1763). Тогда

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{0{,}40}{1{,}66\cdot 1{,}29} = \frac{0{,}40}{2{,}14} = 0{,}19;$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{6{,}17}{(1{,}66)^2} - 3 = 0{,}77.$$

1757. Дано распределение признака X:

x	2	3	4	5	6	7
m	2	6	8	5	3	1

Найти его асимметрию и эксцесс.

1758. Найти асимметрию и эксцесс распределения, заданного таблицей:

x	−4	−3	−2	−1	0	2	3
m	1	5	10	7	4	2	1

1759. Доказать, что асимметрия и эксцесс признака не изменятся от изменения начала его отсчета и изменения масштаба.

1760. Показать, что асимметрия и эксцесс нормально распределенного признака равны нулю.

1761. Найти асимметрию и эксцесс признака, равномерно распределенного на интервале $(-1; 1)$.

Глава XVII Выборочный метод

§ 1. Теорема Ляпунова

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, у каждой из которых существует математическое ожидание и дисперсия. Говорят, что к этой последовательности применима центральная предельная теорема, если

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Если к указанной последовательности случайных величин применима центральная предельная теорема, то при достаточно больших n S_n можно рассматривать приближенно как нормальную случайную величину с математическим ожиданием ES_n и дисперсией DS_n и, следовательно, для этой последовательности имеет место следующее приближенное равенство:

$$P(|S_n - ES_n| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{DS_n}}\right).$$

Теорема Ляпунова устанавливает условия, которым должна удовлетворять последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, чтобы к ней была применима центральная предельная теорема.

Физический смысл всех условий, при которых сумма независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будет распределена практически по нормальному закону, состоит в том, что удельный вес каждого отдельного слагаемого X_i должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых. В частности, если все X_i одинаково распределены, то S_n распределено асимптотически по нормальному закону.

1762. Показать, что теорема Лапласа есть следствие из теоремы Ляпунова.

1763. При составлении статистического отчета надо сложить n чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки, возникшие от округления чисел, взаимно независимы и равномерно распределены на отрезке $(-0{,}5\cdot 10^{-m},\ 0{,}5\cdot 10^{-m})$, найти пределы, в которых с вероятностью, большей 0,997, будет лежать суммарная ошибка, если n достаточно велико.

§ 2. Повторная и бесповторная выборка

Выборочный метод состоит в том, что на основании изучения признака у некоторой части статистической совокупности (*выборки*), полученной в результате случайного отбора, можно сделать вывод о характере распределения признака во всей статистической совокупности (*генеральной совокупности*).

Среднее арифметическое изучаемого признака X в генеральной совокупности, называют *генеральным средним* ($\overline{X}$), а его дисперсию — *генеральной дисперсией* (σ_0^2).

Среднее арифметическое и дисперсия признака X в выборке называются соответственно *выборочным средним* ($\tilde{X}$) и *выборочной дисперсией* (σ^2).

Отношение числа членов генеральной (выборочной) совокупности, обладающих данным признаком, к числу ее членов, т. е. к ее объему, получило название *генеральной (выборочной) доли* и обозначается p (w).

По технике отбора единиц из генеральной совокупности в выборочную выборки делятся на повторные и бесповторные. Если каждая обследованная единица возвращается обратно в генеральную совокупность и, следовательно, может участвовать в дальнейшем отборе, то выборка называется *повторной*. *Бесповторная выборка* состоит в том, что отобранные члены обратно в генеральную совокупность не возвращаются.

Для повторной и бесповторной выборки имеют место равенства

$$E\tilde{X} = \overline{X} \text{ и } Ew = p.$$

За ошибку выборки при определении среднего арифметического принимают среднее квадратическое отклонение выборочного среднего, т. е.

$$\mu = \sqrt{D\tilde{X}} = \sqrt{E(\tilde{X} - \overline{X})^2},$$

а за ошибку выборки при определении доли — величину

$$\mu_д = \sqrt{Dw} = \sqrt{E(w - p)^2}.$$

Если объем генеральной совокупности N, а объем выборки n, то при случайном повторном отборе

$$\mu = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}; \quad \mu_д = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

а при случайном бесповторном отборе

$$\mu = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \approx \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{1-\frac{n}{N}};$$

$$\mu_д = \sqrt{\frac{p(1-p)(N-n)}{n(N-1)}} \approx \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}.$$

Из этих формул видно, что ошибка бесповторного отбора меньше, чем повторного.

Так как обычно σ_0 и p заранее не известны, то их заменяют соответствующими выборочными характеристиками. При этом учитывают, что при повторном отборе

$$E s^2 = \frac{n-1}{n} \sigma_0^2; \quad E[w(1-w)] = \frac{n-1}{n} p(1-p),$$

а при бесповторном отборе

$$E s^2 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1} \sigma_0^2; \quad E[w(1-w)] = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1} p(1-p).$$

Отсюда при повторном отборе

$$\mu \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \left(\mu_д = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n-1}}\right),$$

а при бесповторном отборе

$$\mu \approx \frac{s}{\sqrt{n-1}} \sqrt{1-\frac{n}{N}} \left(\mu_д \approx \sqrt{\frac{w(1-w)}{n-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)}\right),$$

где $s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2$ — несмещенная оценка генеральной дисперсии σ_0^2 $(E s^2 = \sigma_0^2)$.

Если $P(|\tilde{X} - X| < \varepsilon) = P$, то с вероятностью P, называемой *доверительной вероятностью,* можно утверждать, что генеральное среднее $\bar{X}$ заключено между нижней доверительной границей $\tilde{X} - \varepsilon$ и верхней доверительной границей $\tilde{X} + \varepsilon$; ε в этом равенстве называется *предельной погрешностью* для данной доверительной вероятности P.

При достаточно большом n в соответствии с теоремой Ляпунова величины $\tilde{X}$ и w распределены приближенно по нормальному закону, и поэтому имеют место следующие формулы *доверительных вероятностей*:

$$P(|\tilde{X} - \bar{X}| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right); \quad P(|w - p| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\mu_д}\right). \qquad (1)$$

Выборка называется малой, если ее объем настолько мал ($n < 30$), что к ней нельзя применить формулу (1). Пусть из генеральной совокупности, в которой признак X распределен по нормальному закону, произведена повторная выборка объемом в n единиц. Распределение случайной величины $t = \frac{\tilde{X} - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n-1} = \frac{\tilde{X} - \bar{X}}{s}\sqrt{n}$ не зависит от $\bar{X}$ и σ_0^2 и вполне определяется объемом выборки (распределение Стьюдента). Плотность распределения этой случайной величины определяется по формуле

$$S(t, n-1) = C_n\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где C_n — постоянная.

Поэтому формула доверительной вероятности в этом случае имеет вид:

$$P\left(\left|\frac{\tilde{X} - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n-1}\right| < \alpha\right) = 2\int_0^{\alpha} S(t, n-1)\,dt$$

или иначе

$$P(|\tilde{X} - \bar{X}| < \varepsilon) = \Theta_{n-1}\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n-1}}{\sigma}\right), \qquad (2)$$

где $\Theta_{n-1}(x) = 2\int_0^x S(t, n-1)\,dt$.

Для определения необходимого объема выборки, при которой с вероятностью P можно утверждать, что выборочное среднее отличается от генерального по абсолютной величине меньше чем на ε, при повторном (бесповторном) отборе пользуются следующей формулой:

$$n \approx \frac{t^2\sigma_0^2}{\varepsilon^2}\left(n \approx \frac{Nt^2\sigma_0^2}{N\varepsilon^2 + t^2\sigma_0^2}\right),$$

где t — корень уравнения $\Phi(t) = P$ при большой выборке и корень уравнения $\Theta_{n-1}(t) = P$ при малой выборке.

1764. Из 2000 деталей было отобрано 400, распределение которых по размеру дается следующей таблицей:

Размер детали, *мм*	7,95—8,00	8,00—8,05	8,05—8,10	8,10—8,15	8,15—8,20	8,20—8,25
Количество деталей	12	28	132	150	62	16

Найти ошибку выборки при определении среднего в случаях повторного и бесповторного отбора.

Решение. Сначала находим выборочную дисперсию σ^2 способом, указанным в § 5 гл. XVI: $\sigma^2 = 0{,}00272$. При повторном отборе $\mu = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}00272}{400-1}} = 0{,}00261$. Так как $\sqrt{\frac{0{,}00272}{400}} = 0{,}002608$, то при больших n можно μ находить практически по формуле $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

При бесповторном отборе $\mu \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}} = 0{,}00261\sqrt{1-\frac{400}{2000}} = 0{,}00234$.

1765. Для определения процента нестандартных изделий в партии, объем которой равен 10 000, было отобрано 500 деталей, среди которых оказалось 10 нестандартных. Найти ошибку выборки при определении доли в случаях повторного и бесповторного отбора.

Решение. В случае повторного отбора $\mu_д = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$. По условию $w = \frac{10}{500} = 0{,}02$ и $n = 500$. Поэтому $\mu_д = \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{500}} = 0{,}00626$.

При бесповторном отборе

$$\mu_д = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} \approx \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} = 0{,}00626\sqrt{1-\frac{500}{10000}} = 0{,}00610.$$

1766. Для определения среднего процента сырого белка в зернах пшеницы было отобрано 626 зерен, обследование которых показало, что выборочное среднее равно 16,8, а выборочная дисперсия — 4. Чему равна вероятность того, что средний процент сырого белка отличается от 16,8 по абсолютной величине меньше чем на 0,2%?

Решение. Объем генеральной совокупности нам неизвестен. Поэтому ошибку выборки находим по формуле для повторного отбора $\mu \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}$. В нашем случае $n = 626$, $\sigma^2 = 4$ и, следовательно, $\mu \approx \frac{2}{\sqrt{625}} = \frac{2}{25} = 0{,}08$. Так как $P(|\overline{X} - \overline{X}| < \varepsilon) \approx \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)$, то искомая вероятность

$$P(|\bar{X}-16{,}8|<0{,}2)\approx\Phi\left(\frac{0{,}2}{0{,}08}\right)=\Phi(2{,}5)=0{,}98758.$$

1767. Среди стандартных изделий одной фабрики в среднем 15% относится ко второму сорту. С какой вероятностью можно утверждать, что процент изделий второго сорта среди 1000 стандартных изделий данной фабрики отличается от 15% по абсолютной величине меньше чем на 2%?

Решение. Прежде чем находить искомую вероятность, надо вычислить ошибку выборки $\mu_д$: $\mu_д=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{1000}}=$ $=\sqrt{0{,}0001275}=0{,}0113$, так как $n=1000$, $p=15\%=0{,}15$. Известно, что $P(|w-p|<\varepsilon)\approx\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\mu_д}\right)$. В нашем случае $\varepsilon=2\%$, поэтому $P(|w-0{,}15|<0{,}02)\approx\Phi\left(\frac{0{,}02}{0{,}0113}\right)=\Phi(1{,}77)=0{,}92327$.

Заметим, что здесь, как и в предыдущей задаче, объем генеральной совокупности нам неизвестен. Поэтому, несмотря на то, что отбор бесповторный, ошибку выборки находим по формуле повторного отбора. От этого полученная вероятность несколько меньше искомой.

1768. Из партии в 5000 электрических ламп было отобрано по схеме собственно-случайной бесповторной выборки 300. Средняя продолжительность горения ламп в выборке оказалась равной 1450 *ч*, а дисперсия — 40 000. Какова вероятность того, что средний срок горения ламп во всей партии заключен в пределах от 1410 до 1490 *ч*?

Решение. В задаче дано $N=5000$, $n=300$, $\bar{X}=1450$, $\sigma^2=40\,000$. Требуется найти $P(1410<\bar{X}<1490)=P(|\bar{X}-1450|<40)$.

Вычислим сначала ошибку выборки

$$\mu\approx\sqrt{\frac{\sigma^2}{n-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)}=\sqrt{\frac{40\,000}{299}\left(1-\frac{300}{5000}\right)}=11{,}214.$$

По формуле доверительной вероятности находим искомую вероятность

$$P(|\bar{X}-1450|<40)\approx\Phi\left(\frac{40}{11{,}214}\right)=\Phi(3{,}57)=0{,}99964.$$

1769. В выборке объемом 500 единиц, произведенной для определения процента всхожести зерна p, установлена частость доброкачественных зерен $\frac{k}{n}=0{,}94$. Найти, с какой вероятностью может быть принят в этом случае искомый процент всхожести, если допустимая погрешность в его определении равна $\pm$ 2%.

1770. Партия изделий считается годной к выпуску, если брак в ней не превышает 3%. Из партии в 2000 изделий было отобрано и проверено 400. При этом бракованных изделий оказалось 6. Какова вероятность того, что вся партия удовлетворяет техническим условиям и может быть принята?

1771. Для определения средней урожайности пшеницы с одного гектара на площади в 20 000 *га* проведено точное выборочное обследование, результаты которого приведены в таблице:

Урожайность пшеницы, *ц/га*	15,0—17,5	17,5—20,0	20,0—22,5	22,5—25,0	25,0—27,5
Площадь, *га*	100	600	800	450	50

Какова вероятность того, что средняя урожайность пшеницы на всем массиве отличается от среднего выборочного не более чем на 15 *кг*?

1772. В некотором районе в личном владении колхозников имеется 3500 коров. В порядке случайной выборки обследовали 800 коров и установили, что у этой группы средний годовой удой равен 2800 *кг*, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = 250$ *кг*. С какой вероятностью можно гарантировать, что средний годовой удой всех коров отличается от 2800 *кг* по абсолютной величине меньше чем на 10 *кг*? Рассмотреть случаи повторного и бесповторного отбора.

1773. Чему равна вероятность того, что выборочное среднее отличается от 1 по абсолютной величине меньше чем на 0.3, если плотность распределения рассматриваемого признака в генеральной совокупности определяется по формуле $p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-1|}$? Объем выборки $n = 100$.

1774. Для определения процента изделий второго сорта в партии производится случайная повторная выборка объемом 100 единиц. Определить доверительные границы для процента изделий второго сорта во всей партии, которые могут быть гарантированы с доверительной вероятностью $P = 0{,}997$, если в выборке оказалось 25 изделий второго сорта.

Р е ш е н и е. Частость признака в выборке (выборочная доля) $w = \frac{25}{100} = 0{,}25$. Поэтому ошибка выборки

$$\mu_д \approx \sqrt{\frac{w(1-w)}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{100-1}} = 0{,}0435.$$

Требуется найти такое ε, что $P(|w-p| < \varepsilon) = 0{,}997$. Так как $P(|w-p| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\mu_д}\right)$, то приближенно ε может быть найдено

из уравнения $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\mu_д}\right) = 0{,}997$. По таблице (приложение 2) находим $\Phi(t) = 0{,}997$ при $t = 3$. Тогда $\frac{\varepsilon}{\mu_д} = 3$, $\varepsilon = 3\mu_д = 3 \cdot 0{,}0435 = 0{,}1305 = 13{,}05\%$ и, следовательно, генеральная доля с вероятностью 0,997 заключена между

$$w + \varepsilon = 25\% + 13{,}05\% = 38{,}05\%$$

и

$$w - \varepsilon = 25\% - 13{,}05\% = 11{,}95\%.$$

1775. С целью определения средней суммы вкладов в сберегательной кассе, имеющей 2200 вкладчиков, произведено выборочное обследование (бесповторный отбор) 111 вкладов, которое дало следующие результаты:

Сумма вклада, руб.	10—30	30—50	50—70	70—90	90—110	110—130
Число вкладов	1	3	10	30	60	7

Пользуясь этими данными, найти доверительные границы для генерального среднего, которые можно было бы гарантировать с вероятностью 0,96.

Решение. Сначала находим выборочное среднее и выборочную дисперсию:

$X_i' - X_i''$	x_i	m_i	$u_i = \frac{x_i - 80}{20}$	$m_i u_i$	$m_i u_i^2$
10—30	20	1	—3	—3	9
30—50	40	3	—2	—6	12
50—70	60	10	—1	—10	10
70—90	80	30	0	0	0
90—110	100	60	1	60	60
110—130	120	7	2	14	28
Сумма		111		55	119

$$\overline{U} = \frac{55}{111} = 0{,}4955; \quad \overline{U^2} = \frac{119}{111} = 1{,}0721;$$

$$\sigma_U^2 = \overline{U^2} - (\overline{U})^2 = 1{,}0721 - 0{,}2455 = 0{,}8266;$$

$$\tilde{X} = 80 + 20 \cdot 0{,}4955 = 89{,}91;$$

$$\sigma^2 = 20^2 \cdot 0{,}8266 = 330{,}64.$$

Поэтому $\mu \approx \sqrt{\frac{\sigma^2}{n-1}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{330{,}64}{111-1}\left(1 - \frac{111}{2200}\right)} = 1{,}69.$

Так как $\Phi(t) = 0{,}96$ при $t = 2{,}05$, то предельная погрешность $\varepsilon = t\mu = 2{,}05 \cdot 1{,}69 = 3{,}46$ и доверительными границами для генерального среднего будут

$$\bar{X} - \varepsilon = 89{,}91 - 3{,}46 = 86{,}45 \text{ и } \bar{X} + \varepsilon = 89{,}91 + 3{,}46 = 93{,}35.$$

1776. Каков должен быть объем выборки, чтобы при определении процента нестандартных изделий предельная погрешность $\varepsilon = 5\%$ обеспечивалась с доверительной вероятностью $P = 0{,}99896$.

Решение. По заданной доверительной вероятности $P = 0{,}99896$ находим аргумент t функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = 0{,}99896$; $t = 3{,}28$. Следовательно, объем выборки, при котором с вероятностью 0,99896 можно утверждать, что выборочная доля отличается от генеральной по абсолютной величине меньше чем на 5%, определяется по формуле

$$n \approx \frac{t^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} = \frac{(3{,}28)^2\, p(1-p)}{(0{,}05)^2}.$$

Если бы доля признака p была известна хотя бы ориентировочно, то из этой формулы непосредственно следовало бы приближенное значение n. В условии задачи нет никакой информации о p, поэтому рассмотрим n как функцию p и найдем ее максимальное значение. Производная от n по p $n' = \frac{(3{,}28)^2}{(0{,}05)^2}[p(1-p)]' = \frac{(3{,}28)^2}{(0{,}05)^2}(1-2p)$ обращается в нуль при $p = 0{,}5$, а при переходе p через это значение меняет знак с плюса на минус. Таким образом, n принимает максимальное значение при $p = 0{,}5$:

$$n_{\max} = \frac{(3{,}28)^2}{(0{,}05)^2} \cdot \frac{1}{4} \approx 1076.$$

1777. Предполагается произвести выборочное обследование 5000 электроламп с целью установления средней продолжительности их горения. Каким должен быть объем бесповторной выборки, чтобы можно было гарантировать с вероятностью 0,9802, что генеральное среднее отличается от выборочного по абсолютной величине меньше чем на 15 *ч*, если генеральная дисперсия меньше 10 000?

Решение. По таблице (приложение 2) находим, что заданной доверительной вероятности 0,9802 соответствует аргумент $t = 2{,}33$. При бесповторном отборе объем выборки определяется по формуле

$$n \approx \frac{Nt^2\sigma_0^2}{N\varepsilon^2 + t^2\sigma_0^2}.$$

В нашем случае $\sigma_0^2 < 10\,000$, поэтому

$$n \approx \frac{5000 \cdot (2{,}33)^2 \sigma_0^2}{5000 \cdot (15)^2 + (2{,}33)^2 \sigma_0^2} < \frac{5000 \cdot 5{,}4289 \cdot 10\,000}{5000 \cdot 225 + 5{,}4289 \cdot 10\,000} =$$

$$= 230{,}2; \quad n_{\max} = 230.$$

1778. По схеме повторной выборки произведено выборочное измерение выработки на земляных работах у 145 рабочих. В результате этого обследования средняя выработка определена в 4,95 $м^3$ на одного рабочего, а среднее квадратическое отклонение оказалось равным 1,5 $м^3$. Найти доверительные границы для генерального среднего, отвечающие вероятности $P = 0{,}9973$.

1779. Выборочно обследовали качество кирпича. Из 1600 проб в 32 случаях кирпич оказался бракованным. Требуется определить, в каких пределах заключается доля брака для всей продукции, если результат необходимо гарантировать с вероятностью $P = 0{,}954$.

1780. При выборочном обследовании физического веса готовой продукции по схеме бесповторного собственно-случайного отбора получены следующие результаты:

Вес единицы продукции, *кг*	12—15	15—18	18—21	21—24	24—27
Число обследованных единиц	4	10	19	11	5

Найти доверительные границы для генерального среднего, отвечающие вероятности $P = 0{,}954$, если вся партия содержит 980 единиц.

1781. Определить численность выборки при обследовании остатков на расчетных счетах у клиентов Госбанка, чтобы с вероятностью 0,683 ошибка репрезентативности не превышала 5 руб., если $\sigma_0 = 120$ руб.

1782. При просмотре 10 000 волокон из партии льна обнаружено 1200 недозрелых. Сколько надо просмотреть волокон льна из этой партии, чтобы с вероятностью $P = 0{,}997$ можно было ручаться за точность определения доли недозрелых волокон во всей партии в пределах 1%? Отбор бесповторный.

1783. Сколько лиц в возрасте от 20 до 30 лет надо опросить выборочно, чтобы установить среди них процент студентов с точностью до 0,5%, гарантируемой с вероятностью 0,999?

1784. Частости $\frac{k_1}{n_1}$ и $\frac{k_2}{n_2}$ получены в результате двух выборок объемом n_1 и n_2. Найти вероятность того, что $\left|\frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}\right| < \varepsilon$. Рассмотреть случаи повторного и бесповторного отбора.

1785. При изготовлении двух партий изделий в 300 и 600 штук доля бракованных составила соответственно 2% и 3%. Можно ли считать расхождение в проценте брака существенным, т. е. обусловленным изменением технологического процесса?

1786. Среднее квадратическое отклонение десяти измерений некоторой величины равно 1 *см*. С какой вероятностью можно утверждать, что ошибка репрезентативности по абсолютной величине меньше 3 *мм*?

Решение. Результат измерения можно рассматривать как нормальную случайную величину, выборка малая. Поэтому по формуле (2) имеем:

$$P(|\tilde{X}-\overline{X}|<3)=\Theta_{10-1}\left(\frac{3\cdot\sqrt{10-1}}{10}\right)=\Theta_9(0{,}9)=0{,}608.$$

Если бы мы воспользовались формулой (1), то получили бы

$$P(|\tilde{X}-\overline{X}|<\varepsilon)\approx\Phi\left(\frac{3\cdot\sqrt{10-1}}{10}\right)=\Phi(0{,}9)=0{,}632,$$

что несколько больше истинного значения.

1787. Построить графики функций $y=\Phi(0{,}9)$ и $y=\Theta_{n-1}(0{,}9)$ и сравнить их поведение при малых и больших n.

1788. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\Theta_{n-1}(x)=\Phi(x)$.

1789. Результаты пяти измерений дали $\tilde{X}=20$ *г* и $\sigma^2=1$. С какой вероятностью можно утверждать, что $\overline{X}$ лежит в интервале 19,75 — 20,25?

1790. В предыдущей задаче найти доверительные границы для $P=0{,}626$.

1791. Результаты 17 измерений дали $\sigma^2=16$. С какой вероятностью можно утверждать, что предельная погрешность равна 1?

§ 3. Критерии согласия

Статистической гипотезой называется такая гипотеза, которая относится или к виду или параметрам распределения случайной величины и которая может быть проверена статистически.

Правило, устанавливающее условия, при которых проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается (принимается альтернативная гипотеза $H\neq H_0$), называется *статистическим критерием.*

При проверке статистической гипотезы всегда возможно допустить ошибку, которая может быть двоякого рода, как это видно из следующей таблицы, указывающей возможные случаи при проверке гипотезы:

Гипотеза H_0	верная	ложная
опровергается	верная гипотеза отвергается (ошибка первого рода); событие A	ложная гипотеза отвергается (правильное решение)
принимается	верная гипотеза принимается (правильное решение)	ложная гипотеза принимается (ошибка второго рода); событие B

Вероятность α допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу) называется *уровнем значимости критерия*. Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность опровергнуть верную гипотезу. Обычно α полагают равным 0,05 (5%-ный уровень значимости) или 0,01 (1%-ный уровень значимости).

С каждым статистическим критерием связана своя статистическая характеристика гипотезы H_0, которая является некоторой функцией от результатов выборки $\Theta = \Theta(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ (здесь $x^{(i)}$ — значение признака X у i-го члена выборки). По значениям этой характеристики делается заключение о том, принимается или отвергается гипотеза H_0. Множество W значений статистической характеристики Θ, при которых H_0 отвергается, называется *критической областью проверяемой гипотезы*. Если определена функция $\Theta = \Theta(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$, задан уровень значимости α и альтернативная гипотеза H, критическая область должна быть выбрана так, чтобы вероятность попадания Θ в критическую область W при условии справедливости гипотезы H_0 была равна α, т. е. чтобы $P(A) = \alpha$, а вероятность попадания Θ в W при условии справедливости альтернативной гипотезы была максимальной.

Вероятность недопущения ошибки второго рода $1 - P(B)$ называется *мощностью критерия*. Поэтому можно сказать, что критическая область удовлетворяет требованиям: 1) $P(A) = \alpha$; 2) мощность критерия $(1 - P(B))$ по возможности максимальна.

Если

$$\lim_{n\to\infty} (1 - P(B)) = 1,$$

где n — объем выборки, то такой критерий называется *критерием согласия*. Отсюда следует, что для всякого критерия согласия можно указать объем выборки, при котором вероятность ошибки второго рода $P(B)$ меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Пусть предполагается, что функцией распределения случайной величины X является $F(x)$ (гипотеза H_0), а n наблюдений

за этой случайной величиной дали следующие результаты: $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... , $x^{(n)}$. Требуется сделать заключение, подтверждается или отвергается гипотеза H_0 результатами наблюдений. Для этого надо определить функцию $\Theta = \Theta(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$, которая служила бы мерой расхождения между распределением X в генеральной совокупности и в выборке. Такие меры можно конструировать различными способами, но наиболее употребительна мера, введенная Пирсоном.

Область значений X разобьем на k частей: S_1, S_2, ... , S_k. Пусть вероятность того, что X примет значение из S_i, равна p_i ($p_i > 0$), а число членов выборки, значения которых попали в S_i, — m_i. В качестве статистической характеристики гипотезы Пирсон предложил величину

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Можно показать, что при $n \to \infty$ χ_0^2 стремится к распределению χ^2 с $k - s - 1$ степенями свободы (см. задачу 1683), где s—число параметров распределения $F(x)$, которые были найдены по результатам выборки. В силу того что χ_0^2 асимптотически распределено как χ^2, распределением χ^2 в данном случае можно пользоваться только при больших m_i (практически m_i должны быть больше или равны 5). Критическая область критерия Пирсона определяется неравенством: $\chi_0^2 \geqslant \chi^2$, где χ^2 — корень уравнения $P(\chi_0^2 \geqslant \chi^2) = \alpha$ (α — уровень значимости). Если мера расхождения χ_0^2 попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отбрасывается, в противном случае опытные данные ее подтверждают, распределение признака в выборке согласуется с распределением в генеральной совокупности.

1792. На экзамене по данному предмету экзаменатор задает студенту только один вопрос по одной из четырех частей курса. Из 100 студентов 26 получили вопрос по первой части, 32 — по второй, 17 — по третьей и остальные по четвертой. Можно ли по этим результатам принять гипотезу, что для пришедшего на экзамен имеется одинаковая вероятность получить вопрос по любой из четырех частей? (Принять $\alpha = 0{,}05$.)

Решение. В данном случае: $m_1 = 26$, $m_2 = 32$, $m_3 = 17$, $m_4 = 25$, $p_i = 0{,}25$, $n = 100$, $np_i = 25$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Находим χ_0^2: $\chi_0^2 = \frac{(26-25)^2}{25} + \frac{(32-25)^2}{25} + \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(25-25)^2}{25} = 4{,}56$. Поскольку ни один из параметров предполагаемого распределения нами не находился по выборке, то $s = 0$ и число степеней

свободы равно $k-s-1=4-0-1=3$. По таблицам (приложение 4) находим границу критической области. Для $\alpha=0{,}05$ она равна 7,815. Так $4{,}56<7{,}815$, то гипотеза подтвердилась.

1793. При $n=4040$ бросаниях монеты Бюффон получил $m=2048$ выпадений герба. Совместимо ли это с гипотезой о том, что существует постоянная вероятность $p=0{,}5$ выпадения герба?

1794. При 120 подбрасываниях игральной кости на верхней грани единица выпала $m_1=25$ раз, двойка $m_2=19$, тройка $m_3=15$, четверка $m_4=22$, пятерка $m_5=15$ и, наконец, шестерка $m_6=21$ раз. Согласуется ли это с тем, что кость правильной формы?

1795. То же условие, что и в предыдущей задаче, только изменены m_i: $m_1=30$, $m_2=29$, $m_3=25$, $m_4=24$, $m_5=5$, $m_6=7$.

1796. В своей книге «Математические методы статистики» Г. Крамер приводит следующие данные распределения толщины (X) 12 000 бобов:

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
частота	32	103	239	624	1187	1650	1883	1930	1638	1130	737	427	221	110	57	32

где первый интервал — значения X, меньшие 7,00 *мм*, второй — 7,00 — 7,25, третий — 7,25 — 7,50 и т. д. Требуется проверить, согласуется ли толщина бобов в выборке с предположением, что этот признак в генеральной совокупности распределен по нормальному закону?

Решение. Так как никаких сведений о параметрах нормального распределения у нас нет, то за параметр $\bar{X}$ примем $\widetilde{X}$, которое в данном случае равно 8,512, а за генеральную дисперсию — ее несмещенную оценку $s^2=\frac{n}{n-1}\sigma^2=0{,}3798$ ($s=0{,}6163$).

Находим величины np_i для каждого из интервалов. Покажем, как это делается на примере второго интервала:

$$np_i=12\,000\cdot P(7{,}00\leqslant X<725)=12\,000\cdot\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{7{,}25-8{,}712}{0{,}6163}\right)-\right.$$

$$\left.-\Phi\left(\frac{7{,}00-8{,}512}{0{,}6163}\right)\right]=132{,}2.$$

Таким образом, получим следующий ряд теоретических частот: 67,6; 132,2; 309,8; 617,3; 1045,7; 1505,8; 1842,3; 1919,9; 1697,9; 1277,3; 817,0; 444,2; 205,3; 80,7; 27,0; 10,0. Поэтому

$$\chi_0^2 = \frac{(32-67{,}6)^2}{67{,}6} + \frac{(103-132{,}2)^2}{132{,}2} + \ldots + \frac{(57-27{,}0)^2}{27{,}0} + \frac{(32-10{,}0)^2}{10{,}0} = 196{,}5.$$

Так как два параметра генерального распределения были найдены по выборке, то $s=2$, а число степеней свободы $k-s-1=16-2-1=13$. При $\alpha=0{,}01$ границей критической области является $\chi^2=27{,}688$. Так как $\chi_0^2=196{,}5>27{,}688$, то гипотеза о том, что X распределено по нормальному закону, не подтвердилось.

1797. Рассматривая распределение роста 100 взрослых мужчин, приведенное в задаче 1736, как выборку из генеральной совокупности, проверить гипотезу, что в генеральной совокупности признак распределен по нормальному закону.

1798. Распределение признака X в выборке дается следующим вариационным рядом:

3,0—3,6	3,6—4,2	4,2—4,8	4,8—5,4	5,4—6,0	6,0—6,6	6,6—7,2
2	8	35	43	22	15	5

При уровне значимости $\alpha=0{,}01$ проверить гипотезу о нормальности распределения X в генеральной совокупности.

1799. Обосновать критерий Романовского, согласно которому, если

$$\frac{|\chi_0^2-k+s+1|}{\sqrt{2(k-s-1)}}<3,$$

то эмпирическое и теоретическое распределения согласуются.

Глава XVIII Теория корреляции

§ 1. Метод наименьших квадратов

Пусть предполагается, что зависимость признака Y от признака X имеет вид $y=f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, где x — значения признака X; y — значения признака Y; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — подлежащие определению параметры, и что в результате эксперимента были получены следующие эмпирические данные:

Значение признака X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Значение признака Y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

(1)

Метод наименьших квадратов утверждает, что наивероятнейшие значения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ дают минимум функции

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)]^2.$$

Если $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим параметрам, то необходимое условие минимума функции S представляет систему m уравнений с m неизвестными:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = 0; \quad \ldots; \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_m} = 0. \tag{2}$$

Нахождение функциональной зависимости между признаками Y и X на основании (1) называют *выравниванием* эмпирических данных вдоль кривой $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.

Если $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \alpha_1 x + \alpha_2$, то этой кривой будет прямая линия $y = \alpha_1 x + \alpha_2$. В этом случае система (2) может быть преобразована в так называемую нормальную систему метода наименьших квадратов при выравнивании по прямой:

$$\begin{cases} \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \alpha_2 n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{3}$$

Система (2) при выравнивании по параболе $y = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ может быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + \alpha_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + \alpha_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i; \\ \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + \alpha_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \alpha_3 n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{4}$$

1800. В «Основах химии» Д. И. Менделеева приводятся данные о растворимости азотнокислого натрия $NaNO_3$ в зависи-

мости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных частей $NaNO_3$ при соответствующих температурах:

Температура, °С	0	4	10	15	21	29	36	51	68
Количество $NaNO_3$	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Предполагая, что количество $NaNO_3$ (Y), которое растворяется в 100 частях воды, зависит линейно от температуры (X) раствора, найти параметры a и b в формуле $y = ax + b$ по методу наименьших квадратов.

Решение. Для нахождения параметров a и b по методу наименьших квадратов необходимо решить систему (3), в которой в этом случае x_i — температура раствора; y_i = количество азотнокислого натрия, которое растворяется в 100 *л* воды при данной температуре; $\alpha_1 = a$; $\alpha_2 = b$. Коэффициенты этой системы рассчитывают по следующей схеме:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y$
0	66,7	0	0
4	71,0	16	284,0
10	76,3	100	763,0
15	80,6	225	1209,0
21	85,7	441	1799,7
29	92,9	841	2694,1
36	39,4	1296	3578,4
51	113,6	2601	5793,6
68	125,1	4624	8506,8
Сумма 234	811,3	10 144	24 628,6

Таким образом, для определения a и b необходимо решить следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 10\,144\,a + 234\,b = 24\,628{,}6; \\ 234\,a + 9\,b = 811{,}3. \end{cases}$$

Левую и правую части второго уравнения умножим на 26 и вычтем из первого уравнения системы. Тогда получим $4060a = 3534{,}8$. Отсюда $a = 0{,}87$; $9b = 811{,}3 - 234\,a = 811{,}3 -$

$-203{,}58 = 607{,}72$; $b = 57{,}5$. Следовательно, зависимость y от x имеет вид $y = 0{,}87x + 57{,}5$.

1801. Выпуск некоторым предприятием промышленной продукции (Y) по годам семилетки (X) характеризуется следующими данными:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y, млн. руб.	0,5	0,5	1,5	3,5	6,5	10,5	15,5

Выравнять зависимость Y от X по параболе $y = ax^2 + bx + c$.

Решение. Для нахождения параметров a, b, c по методу наименьших квадратов необходимо решить систему (4), в которой в данном случае x_i — это год семилетки; y_i — соответствующая продукция. Коэффициенты системы (4) рассчитываем по следующей схеме:

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,5	1	1	1	0,5	0,5
2	0,5	4	8	16	1	2
3	1,5	9	27	81	4,5	13,5
4	3,5	16	64	256	14	56
5	6,5	25	125	625	32,5	162,5
6	10,5	36	216	1296	63	378
7	15,5	49	343	2401	108,5	159,5
Сумма 28	38,5	140	784	4676	224	1372

Составляем систему для определения a, b, c:

$$4676a + 784b + 140c = 1372;$$
$$784a + 140b + 28c = 224;$$
$$140a + 28b + 7c = 38{,}5.$$

Отсюда $a = 0{,}5$; $b = -1{,}5$; $c = 1{,}5$.

1802. Восемь раз при различных значениях признака X было измерено значение признака Y. Полученные результаты приводятся в следующей таблице:

X	0,30	0,91	1,50	2,00	2,20	2,62	3,00	3,30
Y	0,20	0,43	0,35	0,52	0,81	0,68	1,15	0,85

Предполагая, что теоретически $y = ax + b$, найти a и b.

1803. Имеются следующие данные о зависимости признаков X и Y от признака T:

T	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961
X	37	47	49	51	61	75	80	92	102	117	120	122
Y	53	42	30	24	22	22	26	31	35	38	38	36

Выравнять зависимости признаков X и Y от признака T. Построить соответствующие прямые.

1804. Темпы роста (Y) производительности труда рабочих в государственной и кооперативной промышленности БССР (без промышленности колхозов) за 1950 — 1961 гг. (X) приведены в следующей таблице (Народное хозяйство БССР. Статистический сборник. Минск, 1963):

X	1950	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961
Y в % к 1950 г.	100	156	170	184	194	205	220	229

Предполагая, что зависимость Y от X линейная $Y = aX + b$, найти a и b по методу наименьших квадратов.

1805. Ниже приводится урожайность зерновых (Y) в СССР в 1922—1934 гг. (X) (О. Ланге. Введение в эконометрику. М., 1964):

X	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934
Y, *ц/га*	7,6	7,2	6,2	8,3	8,2	7,6	7,9	7,5	8,5	8,7	7,0	8,8	8,5

Выравнять зависимость Y от X вдоль прямой $y = ax + b$, пользуясь методом наименьших квадратов.

1806. Физический объем розничного товарооборота (Y) государственной и кооперативной торговли (в сопоставимых ценах) в БССР за 1950 — 1961 гг. (X) приводится в следующей таблице (Народное хозяйство БССР. Статистический сборник. Минск, 1963):

X	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961
Y, %	100	113	121	148	183	194	219	260	277	304	338	352

Выравнять по методу наименьших квадратов эти данные по прямой $y = ax + b$.

1807. Предполагая, что зависимость национального дохода в СССР (Y) от года (X) имеет вид $y = ab^{x-1932}$, найти методом наименьших квадратов a и b, если известен национальный доход в СССР в 1932 — 1939 гг. (О Ланге. Введение в эконометрику. М., 1964):

X	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938
Y, млрд. руб.	45,5	48,5	55,8	65,7	86,0	96,3	105,0

1808. Пусть зависимость признака Y от признака X характеризуется следующей таблицей:

X	—2	—1	0	1	2	3
Y	—2	—3	—3	—1	3	7

Предполагая, что $y = ax^2 + bx + c$, найти параметры этой зависимости, пользуясь методом наименьших квадратов.

1809. Ниже приведена таблица значений признака Y при различных значениях признака X:

X	12,0	13,1	14,0	16,1	17,4	18,0	20,0	21,4	21,9	24,1	25,0	26,8	28,1	30,0
Y	54	59	67	76	85	97	107	118	127	139	153	160	178	203

Выравнять зависимость Y от X вдоль кривой $y = ax^2 + bx + c$, пользуясь методом наименьших квадратов.

1810. Исследование зависимости продолжительности (t) решения систем линейных уравнений одинаковой степени трудности от порядка системы (n) дано следующей таблицей:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, мин	12	35	75	130	210	315	445	600	800

Предполагая, что $t = An^{\alpha}$, найти A и α методом наименьших квадратов.

§ 2. Линейная корреляционная зависимость

Говорят, что два признака X и Y находятся в *корреляционной зависимости*, если каждому значению одного из них соответствует некоторое распределение другого. Корреляционная зависимость между признаками X и Y обычно задается с помощью *корреляционной таблицы*:

X \ Y	y_1	y_2	. . .	y_j	. . .	y_n	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	. . .	m_{1j}	. . .	m_{1n}	m_{x1}
x_2	m_{21}	m_{22}	. . .	m_{2j}	. . .	m_{2n}	m_{x2}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_i	m_{i1}	m_{i2}	. . .	m_{ij}	. . .	m_{in}	m_{xi}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_k	m_{k1}	m_{k2}	. . .	m_{kj}	. . .	m_{kn}	m_{xk}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	. . .	m_{y_j}	. . .	m_{y_n}	N

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k$; $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n$ — середины интервалов или значения признаков X и Y, а $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{xi}, \ldots, m_{xk}$; $m_{y_1}, m_{y_2}, \ldots, m_{yj}, \ldots, m_{yn}$, — соответствующие частоты; m_{ij} — частота, с которой встречается пара (x_i, y_j);

$$N = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}.$$

Корреляционная зависимость между признаками Y и X может быть заменена *функциональной*, если каждому значению признака X поставить в соответствие условное среднее признака Y, т. е. $X = x_i$ поставить в соответствие величину

$$\overline{Y}_{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_{ij} y_j}{m_{x_i}}.$$

Если теперь точки $(x_i, \overline{Y}_{xi})$ выравнять по методу наименьших квадратов вдоль кривой $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, то последняя называется *линией регрессии* y на x, а ее уравнение — *уравнением регрессии* y на x.

Аналогично определяется линия регрессии x на y.

Наиболее простыми и наиболее важными случаями кривых регрессий являются прямые линии.

Угловой коэффициент прямой регрессии y на x (x на y) называют *коэффициентом регрессии* y на x (x на y) и обозначают обычно через $\rho_{y/x}$ ($\rho_{x/y}$). Коэффициенты регрессии могут быть вычислены по формулам:

$$\rho_{y/x} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sigma_X^2}; \quad \rho_{x/y} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sigma_Y^2},$$

где $\overline{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j}{N}$ — среднее значение произведения признаков X и Y; $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — их средние значения, а σ_X^2 и σ_Y^2 — их дисперсии.

Уравнения прямых регрессий имеют вид: $y - \overline{Y} = \rho_{y/x}(x - \overline{X})$; $x - \overline{X} = \rho_{x/y}(y - \overline{Y})$.

Коэффициентом линейной корреляции признаков X и Y называется величина

$$r = r(X, Y) = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sigma_X \sigma_Y} = \pm\sqrt{\rho_{y/x}\rho_{x/y}}.$$

Коэффициент линейной корреляции r обладает следующими свойствами:

1) $-1 \leqslant r \leqslant 1$;

2) $r[\alpha(X - x_0), \beta(Y - y_0)] = r(X, Y)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$;

3) если $r(X, Y) = \pm 1$, то между признаками X и Y существует линейная функциональная зависимость (при $r = 1$ прямая, а при $r = -1$ обратная);

4) если $r(X, Y) = 0$, то между признаками X и Y отсутствует линейная корреляционная зависимость;

5) $\rho_{y/x} = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ и $\rho_{x/y} = r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$.

Квадрат коэффициента линейной корреляции дает коэффициент детерминации, который измеряет долю вариации Y, объясняемую влиянием X, и наоборот.

На практике о распределении признаков X и Y в генеральной совокупности судят по данным выборки. По этим данным может быть найден *выборочный коэффициент* линейной корреляции $r_в$, который является случайной величиной. При достаточно большом объеме выборки $r_в \approx r$. Если распределение признаков X и Y достаточно близко к нормальному, то можно приближенно считать $r_в$ также нормальной случайной величиной, среднее квадратическое отклонение которой равно $\frac{1 - r^2}{\sqrt{N}}$, где N — объем выборки.

1811. Из генеральной совокупности, распределение признаков X и Y в которой нормальное, произведена выборка с объемом в 530 единиц. Результаты измерения признаков X и Y у членов выборки приводятся в следующей корреляционной таблице:

X \ Y	15—25	25—35	35—45	45—55	55—65	65—75	75—85	m_x
200—300	19	5						24
300—400	23	116	11					150
400—500	1	41	98	9				149
500—600		4	32	65	7			108
600—700		1	4	21	36	3		65
700—800			1	2	11	13	1	28
800—900					1	3	2	6
m_y	43	167	146	97	55	19	3	530

Найти выборочный коэффициент линейной корреляции и его среднее квадратическое отклонение. Написать уравнения прямых регрессий y на x и x на y.

Решение. Сначала интервалы значений признаков X и Y заменим их серединами. В результате получим корреляционную таблицу, имеющую вид таблицы, помещенной в начале этого параграфа. Так как коэффициент линейной корреляции не изменяется от изменения начал отсчетов и масштабов признаков (свойство 2), то для упрощения расчетов заменим значения признаков X и Y на значения признаков U и V, связанных с первыми следующими соотношениями:

$$U = \alpha (X - x_0), \quad V = \beta (Y - y_0),$$

в которых положим $x_0 = 550$; $y_0 = 50$; $\alpha = 0{,}01$; $\beta = 0{,}1$. Полученные значения α и β запишем над соответствующими интервалами. Все дальнейшие вычисления производятся над значениями признаков U и V (табл. на стр. 403):

$$\overline{UV} = \frac{\sum_i \sum_j m_{ij} u_i v_j}{N} = \frac{1161}{530} = 2{,}191;$$

$$\overline{V} = \frac{\sum_j m_{y_j} v_j}{N} = \frac{-507}{530} = -0{,}957; \quad \overline{U} = \frac{\sum_i m_{x_i} u_i}{N} = \frac{-282}{530} = -0{,}721;$$

$$\overline{V^2} = \frac{\sum_j m_{y_j} v_j^2}{N} = \frac{1359}{530} = 2{,}564; \quad \overline{U^2} = \frac{\sum_i m_{x_i} u_i^2}{N} = \frac{1196}{530} = 2{,}257;$$

$$\sigma_V^2 = \overline{V^2} - (\overline{V})^2 = 2{,}564 - 0{,}916 = 1{,}648; \quad \sigma_U^2 = \overline{U^2} - (\overline{U})^2 = 2{,}257 - 0{,}520 = 1{,}737; \quad \sigma_V = 1{,}28; \quad \sigma_U = 1{,}32;$$

Таблица

	V	−3	−2	−1	0	1	2	3					
U	X \ Y	15—25 20	25—35 30	35—45 40	45—55 50	55—65 60	65—75 70	75—85 80	m_x	m_xU	m_xU^2	$\sum_y m_{xv}V$	$U\sum_y m_{xy}V$
−3	200—300 250	19	5						24	−72	216	−67	201
−2	300—400 350	23	116	11					150	−300	600	−312	624
−1	400—500 450	1	41	98	9				149	−149	149	−183	183
0	500—600 550		4	32	65	7			108	0	0	−33	0
1	600—700 650		1	4	21	36	3		65	65	65	36	36
2	700—800 750			1	2	11	13	1	28	56	112	39	78
3	800—900 850					1	3	2	6	18	54	13	39
	m_y	43	167	146	97	55	19	3	530	−382	1196		1161
	m_yV	−129	−334	−146	0	55	38	9	−507				
	m_yV^2	387	668	146	0	55	76	27	1359				

$$r=\frac{\overline{UV}-\overline{U}\,\overline{V}}{\sigma_U\sigma_V}=\frac{2{,}191-0{,}690}{1{,}32\cdot 1{,}28}=\frac{1{,}501}{1{,}690}=0{,}888;\ \overline{X}=x_0+$$

$$+\frac{\overline{U}}{\alpha}=550+\frac{-0{,}721}{0{,}01}=550-72{,}1=477{,}9;\ \overline{Y}=y_0+$$

$$+\frac{\overline{V}}{\beta}=50+\frac{-0{,}957}{0{,}1}=50-9{,}57=40{,}43;\ \rho_{y/x}=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=$$

$$=0{,}888\cdot\frac{1{,}28}{\frac{0{,}1}{1{,}32}}=0{,}0888\cdot\frac{128}{132}=0{,}0849;\ \rho_{x/y}=r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}=9{,}16;$$

$$y-40{,}43=0{,}085\,(x-477{,}9);\ x-477{,}9=9{,}16\,(y-40{,}43);$$

$$\sigma_r\approx\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}=0{,}009.$$

1812. Найти коэффициент линейной корреляции между признаками X и Y, распределение которых дается следующей таблицей:

X \ Y	1	2	3	4	5	m_x
1	2					2
2	1	1	2			4
3		2	2	1		5
4				2	2	4
m_y	3	3	4	3	2	15

1813. Теммис получил следующие результаты при измерении диаметра (Y) пыльцы шаровидной фуксии в зависимости от числа пор (X), расположенных в экваториальной плоскости пылинки (Б. Л. Ван дер Варден. Математическая статистика. М., 1960):

Y, мк	X					m_y
	0	1	2	3	4	
10	3					3
15	7	3				10
20		6				6
25		1				1
30			4			4
35			5			5

Продолжение

Y, мк	X					m_y
	0	1	2	3	4	
40			1	3		4
45				4		4
50				3	3	6
55					4	4
60					3	3
m_x	10	10	10	10	10	50

Найти коэффициент линейной корреляции между признаками X и Y и уравнение прямой регрессии y на x.

1814. Вычислить коэффициент линейной корреляции и получить уравнение прямой регрессии x на y по данным нижеприведенной таблицы распределения 100 растений житняка по общему весу всего растения (Y) и по весу семян (X):

X, г \ Y, г	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130	m_x
10,5—15,5	3											3
15,5—20,5	2	6	1	1								10
20,5—25,5		4	13	2	1							20
25,5—30,5			5	4								9
30,5—35,5				8	4	2						14
35,5—40,5				1	4	6						11
40,5—45,5					2	6	1					9
45,5—50,5		1				1	5	1				8
50,5—55,5								4	2			6
55,5—60,5								1	4	1		6
60,5—65,5									1			1
65,5—70,5									1	1	1	3
m_y	5	11	19	16	11	15	6	6	8	2	1	100

1815. Найти коэффициент линейной корреляции между признаками X и Y и написать уравнения прямых регрессий y на x и x на y, если распределение признаков X и Y приводится в следующей таблице:

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	m_x
0						2						2
1					3	2	3					8
2			2	6	4	3	4	6	2			27
3			5	4	6	5	6	4	5			35
4	1	3	4	6	7	8	7	6	4	3	1	50
5			5	4	6	5	6	4	5			35
6			2	6	4	3	4	6	2			27
7					3	2	3					8
8						2						2
m_y	1	3	18	26	33	32	33	26	18	3	1	194

1816. Значения признаков X и Y у членов некоторой совокупности даются следующими корреляционными таблицами:

1)

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	m_x
25	2	1							3
35		5	3						8
45			4	2	4				10
55					2	3	1	5	11
65							6	2	8
m_y	2	6	7	2	6	3	7	7	40

2)

X \ Y	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	m_x
210—220			1	1			2
220—230		1	4	3	2		10
230—240	2	7	6	9	7	3	36
240—250		3	4	3	3		13
250—260			3	2	2		7
260—270			2	2			4
m_y	2	11	22	20	14	3	72

3)

X \ Y	0,02	0,06	0,10	0,14	0,18	0,22	m_x
720—750	3	1	1				5
750—780	1	2	4	3	2		12
780—810		1	3	2	3	2	11
810—840			1	4	4	3	12
840—870				1	2	5	8
m_y	4	4	9	10	11	10	48

4)

X \ Y	120—140	140—160	160—180	180—200	200—220	220—240	240—260	m_x
10—20					7	5	3	15
20—30				5	4	2		11
30—40			3	4	2			9
40—50		2	6	4				12
50—60	3	5	3					11
60—70	4	2						6
m_y	7	9	12	13	13	7	3	64

Найти в каждом отдельном случае, чему равен коэффициент линейной корреляции, и написать уравнения прямых регрессий.

§ 3. Корреляционное отношение

Если линии регрессий отличны от прямых, то коэффициент корреляции не дает полного представления о силе связи между соответствующими признаками X и Y. В этом случае за меру зависимости признака Y от признака X принимают отношение среднего квадратического отклонения условных средних $\overline{Y}_x$ относительно общей средней $\overline{Y}$ к среднему квадратическому отклонению признака Y. Эта величина называется *корреляционным отношением* Y от X и обозначается через $\eta_{y/x}$. Аналогично вводится $\eta_{x/y}$.

Следовательно, если распределение признаков X и Y дается корреляционной таблицей (см. § 2 гл. XVIII), то

$$\eta_{y/x} = \frac{\sigma(\overline{Y}_x)}{\sigma_Y} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} m_{x_i}(\overline{Y}_{x_i} - \overline{Y})^2}{\sum_{j=1}^{n} m_{y_j}(y_j - \overline{Y})^2}};$$

$$\eta_{x/y} = \frac{\sigma(\overline{X}_y)}{\sigma_X} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} m_{y_j}(\overline{X}_{y_j} - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} m_{x_i}(x_i - \overline{X})^2}}.$$

Корреляционное отношение обладает следующими свойствами:

1) корреляционное отношение всегда заключено между 0 и 1, т. е. $0 \leqslant \eta_{y/x} \leqslant 1$ и $0 \leqslant \eta_{x/y} \leqslant 1$;

2) необходимое и достаточное условие отсутствия корреляционной зависимости у признака Y от признака X состоит в том, что $\eta_{y/x} = 0$;

3) если корреляционное отношение $\eta_{y/x} = 1$, то между признаком Y и признаком X существует функциональная зависимость $y = f(x)$;

4) коэффициент линейной корреляции между признаками X и Y всегда по абсолютной величине не больше корреляционных отношений $\eta_{y/x}$ и $\eta_{x/y}$: $|r(X, Y)| \leqslant \eta_{y/x}$, $|r(X, Y)| \leqslant \eta_{x/y}$;

5) если $U = \alpha(X - x_0)$, а $V = \beta(Y - y_0)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$, то $\eta_{v/u} = \eta_{y/x}$ и $\eta_{u/v} = \eta_{x/y}$.

1817. Распределение признаков X и Y приводится в следующей корреляционной таблице:

X \ Y	0	10	20	30	40	50	60	70	80	m_x
—2				1	2	1				4
—1			1	3		3	1			8
0		2	4				4	2		12
1	1	5						5	1	12
2	3								3	6
m_y	4	7	5	4	2	4	5	7	4	42

Найти корреляционные отношения $\eta_{y/x}$ и $\eta_{x/y}$ и сравнить их с соответствующим коэффициентом линейной корреляции.

Решение. Расчет корреляционных отношений будем производить по следующей схеме (табл. на стр. 410):

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_x m_x x}{\sum\limits_x m_x} = \frac{8}{42} = 0{,}190; \quad \overline{X^2} = \frac{\sum\limits_x m_x x^2}{\sum\limits_x m_x} =$$

$$= \frac{60}{42} = 1{,}424; \quad \sigma_X^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = 1{,}388;$$

$$\overline{V} = \frac{\sum\limits_y m_y v}{\sum\limits_y m_y} = \frac{0}{42} = 0; \quad \overline{V^2} = \frac{\sum\limits_y m_y v^2}{\sum\limits_y m_y} = \frac{302}{42} = 7{,}190; \quad \sigma_V^2 = 7{,}190;$$

$$\overline{(\overline{V}_x)^2} = \frac{\sum\limits_x \frac{1}{m_x} \left(\sum\limits_y m_{xy} v\right)^2}{\sum\limits_x m_x} = \frac{0}{42} = 0; \quad \sigma^2(\overline{V}_x) = \overline{(\overline{V}_x)^2} -$$

$$- (\overline{V})^2 = 0 - 0 = 0;$$

$$\overline{(\overline{X}_v)^2} = \frac{\sum\limits_y \frac{1}{m_y} \left(\sum\limits_x m_{xy} x\right)^2}{\sum\limits_y m_y} = \frac{52{,}542}{42} = 1{,}251; \quad \sigma^2(\overline{X}_v) = \overline{(\overline{X}_v)^2} -$$

$$- (\overline{X})^2 = 1{,}215.$$

Таблица

V	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4							
X \ Y	0	10	20	30	40	50	60	70	80	m_x	$m_x x$	$m_x x^2$	$\sum_y m_{xy} v$	$x\sum_y m_{xy} v$	$(\sum_y m_{xy} v)^2$	$\frac{1}{m_x}(\sum_y m_{xy} v)^2$
−2				1	2	1				4	−8	16	0	0	0	0
−1			1	3		3	1			8	−8	8	0	0	0	0
0		2	4				4	2		12	0	0	0	0	0	0
1	1	5						5	1	12	12	12	0	0	0	0
2	3								3	6	12	24	0	0	0	0
m_y	4	7	5	4	2	4	5	7	4	42	8	60	0	0		0
$m_y v$	−16	−21	−10	−4	0	4	10	21	16	0						
$m_y v^2$	64	63	20	4	0	4	20	63	64	302						
$\sum_x m_{xy} x$	7	5	−1	−5	−4	−5	−1	5	7	8						
$(\sum_x m_{xy} x)^2$	49	25	1	25	16	25	1	25	49							
$(\sum_x m_{xy} x)^2 \cdot \frac{1}{m_y}$	12,250	3,571	0,2	6,25	8	6,25	0,2	3,571	12,250	52,542						

$$V = \frac{Y - 40}{10}$$

Отсюда, учитывая свойство 5, $\eta_{y/x} = \eta_{v/x} = \sqrt{\frac{\sigma^2(\overline{V}_x)}{\sigma_V^2}} = \sqrt{\frac{0}{7{,}190}} = 0$; $\eta_{x/y} = \eta_{x/v} = \sqrt{\frac{\sigma^2(\overline{X}_v)}{\sigma_X^2}} = \sqrt{\frac{1{,}215}{1{,}388}} = \sqrt{0{,}875} = 0{,}935$. Очевидно, $\rho_{y/x} = \rho_{x/y} = 0$ и $r(X, Y) = 0$.

1818. Следующая корреляционная таблица дает распределение признаков X и Y:

X \ Y	10	20	30	40	50	m_x
5	2				2	4
6	1	1		1	1	4
7		2	1	2		5
8			1			1
m_y	3	3	2	3	3	14

Найти $\eta_{y/x}$ и $\eta_{x/y}$.

1819. Из 125 опытных участков 55 находилось на неудобренном массиве и 70 на удобренном. При этом на всех 125 участках имела место следующая урожайность:

Средний урожай, $г/м^2$	95	105	115	125	135	145	155	165	175	Сумма
Число участков на I массиве	2	5	12	15	10	7	3	1		55
Число участков на II массиве			1	2	8	24	19	11	5	70

Найти корреляционное отношение урожайности от удобрений.

§ 4. Множественная корреляция

На практике часто приходится исследовать статистические связи между тремя и большим числом признаков.

Пусть результаты измерения признаков X, Y, Z у членов некоторой статистической совокупности представлены в следующей таблице:

X	Y	Z	Частота m
x_1	y_1	z_1	m_1
x_2	y_2	z_2	m_2
⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	y_i	z_i	m_i
⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	y_n	z_n	m_n

Если предположить, что зависимость признака Z от признаков X и Y имеет вид $Z = aX + bY + c$, а отклонения табличных значений Z от соответствующих значений приведенной функции носят случайный характер, то коэффициенты a, b, c могут быть определены по методу наименьших квадратов, который для их определения дает следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a\overline{X^2} + b\overline{XY} + c\overline{X} = \overline{XZ}; \\ a\overline{XY} + b\overline{Y^2} + c\overline{Y} = \overline{YZ}; \\ a\overline{X} + b\overline{Y} + c = \overline{Z}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что

$$a = \frac{r(X, Z) - r(Y, Z)\, r(X, Y)}{1 - r^2(X, Y)} \cdot \frac{\sigma_Z}{\sigma_X};$$

$$b = \frac{r(Y, Z) - r(X, Z)\, r(X, Y)}{1 - r^2(X, Y)} \cdot \frac{\sigma_Z}{\sigma_Y};\quad c = \overline{Z} - a\overline{X} - b\overline{Y},$$

где $r(X, Y)$ — коэффициент линейной корреляции между X и Y и т. д.; σ_X, σ_Y, σ_Z — средние квадратические отклонения признаков X, Y, Z, а $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ — их средние арифметические значения.

За *меру тесноты* линейной связи между Z и X и Y принимают *совокупный коэффициент корреляции*

$$R_{Z,\,XY} = \sqrt{\frac{r^2(X, Z) + r^2(Y, Z) - 2r(X, Z)\, r(Y, Z)\, r(X, Y)}{1 - r^2(X, Y)}}.$$

Совокупный коэффициент линейной корреляции обладает следующими свойствами:

1) $0 \leqslant R \leqslant 1$;

2) если $R_{Z,\,XY}=0$, то между признаком Z и признаками X и Y отсутствует линейная зависимость;

3) если $R_{Z,\,XY}=1$, то Z находится в линейной функциональной зависимости от X и Y ($Z=aX+bY+c$).

Для установления влияния признака X (или признака Y) на изменение Z пользуются *частным коэффициентом корреляции*

$$r_Y(Z,\ X)=\frac{r(X,\ Z)-r(Y,\ Z)\,r(X,\ Y)}{\sqrt{[1-r^2(X,\ Y)]\,[1-r^2(Y,\ Z)]}}$$

(аналогично определяется и $r_X(Z,\ Y)$. Свойства частных коэффициентов корреляции такие же, как и свойства коэффициентов линейной корреляции.

1820. Распределение признаков X, Y и Z у членов некоторой статистической совокупности приводится в следующей таблице:

X	1	1	2	2	3	3	3	4	5	5	6	7	7	8
Y	5	3	2	4	5	5	6	7	8	8	8	7	8	10
Z	−2	−4	−1	−3	−3	−4	−4	−6	−7	−6	−9	−8	−8	−10
m	1	2	3	3	2	4	3	2	3	1	2	1	2	1

Найти совокупный коэффициент линейной корреляции $R_{Z,\,XY}$ и частные коэффициенты корреляции $r_Y(Z,\ X)$ и $r_X(Z,\ Y)$.

Решение. Так как $R_{Z,\,XY}$, $r_X(Y,\ Z)$ и $r_Y(X,\ Z)$ определяются через коэффициенты линейной корреляции между признаками X и Y, X и Z и Y и Z, то сначала находим последние. Все необходимые при этом вычисления видны из таблицы (см. табл. на стр. 414):

$$\overline{X'}=\frac{-9}{30}=-0{,}3;\quad \overline{Y'}=\frac{22}{30}=-0{,}733;\quad \overline{Z'}=\frac{3}{30}=0{,}1;$$

$$\overline{(X')^2}=\frac{115}{30}=3{,}833;\qquad \overline{(Y')^2}=\frac{150}{30}=5;\qquad \overline{(Z')^2}=\frac{185}{30}=6{,}167;$$

$$\sigma^2_{X'}=3{,}833-(-0{,}3)^2=3{,}743;\ \sigma^2_{Y'}=5-(0{,}733)^2=4{,}463;$$

$$\sigma^2_{Z'}=6{,}167-(0{,}1)^2=6{,}157;\ \sigma_{X'}=1{,}934;\ \sigma_{Y'}=2{,}112;$$

$$\sigma_{Z'}=2{,}481;$$

$$\overline{X'Y'}=\frac{101}{30}=3{,}367;\ \overline{X'Z'}=\frac{-132}{30}=-4{,}4;\ \overline{Y'Z'}=$$

$$=\frac{-141}{30}=-4{,}7;\ r(X,\ Y)=\frac{3{,}367-(-0{,}3)\cdot 0{,}733}{1{,}934\cdot 2{,}112}=0{,}879;$$

Таблица

X	Y	Z	m	$X'=X-4$	$Y'=Y-5$	$Z'=Z+5$	mX'	mX'^2	mY'	mY'^2	mZ'	mZ'^2	$mX'Y'$	$mX'Z'$	$mY'Z'$
1	5	−2	1	−3	0	3	−3	9	0	0	3	9	0	−9	0
1	3	−4	2	−3	−2	1	−6	18	−4	8	2	2	12	−6	−4
2	2	−1	3	−2	−3	4	−6	12	−9	27	12	48	18	−24	−36
2	4	−3	3	−2	−1	2	−6	12	−3	3	6	12	6	−12	−6
3	5	−3	2	−1	0	2	−2	2	0	0	4	8	0	−4	0
3	5	−4	4	−1	0	1	−4	4	0	0	4	4	0	−4	0
3	6	−4	3	−1	1	1	−3	3	3	3	3	3	−3	−3	3
4	7	−6	2	0	2	−1	0	0	4	8	−2	2	0	0	−4
5	8	−7	3	1	3	−2	3	3	9	27	−6	12	9	−6	−18
5	8	−6	1	1	3	−1	1	1	3	9	−1	1	3	−1	−3
6	8	−9	2	2	3	−4	4	8	6	18	−8	32	12	−16	−24
7	7	−8	1	3	2	−3	3	9	2	4	−3	9	6	−9	−6
7	8	−8	2	3	3	−3	6	18	6	18	−6	18	18	−18	−18
8	10	−10	1	4	5	−5	4	16	5	25	−5	25	20	−20	−25
Сумма			30				−9	115	22	150	3	185	101	−132	−141

$$r(X, Z) = \frac{-4,4 - (-0,3)(0,1)}{1,934 \cdot 2,481} = -0,910;\ r(Y, Z) =$$
$$= \frac{-4,7 - 0,733 \cdot 0,1}{2,112 \cdot 2,481} = -0,901;\ r_X(Y, Z) =$$
$$= -0,163;\ r_Y(X, Z) = -0,570;\ R_{Z, XY} = 0,935.$$

1821. Оценить статистическую линейную зависимость между тремя переменными: разрывной длиной пряжи (Z) и длиной (X) и номером волокна (Y), если результаты испытаний даны в следующей таблице:

Z, км	X, мм	Y	Z, км	X мм	Y	Z, км	X, мм	Y
4,9	29	2150	9,4	45	3080	10,0	61	6580
7,4	29	4250	7,7	45	3900	7,5	69	2050
6,7	31	4650	9,4	45	6250	8,5	69	3390
7,2	39	2390	7,1	58	2440	10,4	70	4980
7,8	39	4220	8,4	58	3270	10,8	70	6450
9,4	39	5970	8,9	61	4940			

1822. Результаты измерений значений признаков X, Y, Z у 59 членов статистической совокупности приведены в следующей таблице:

X	10	10	15	10	15	15	20	20	20	20	25	25	25	30	30	30	35	40	45	45	50	55
Y	40	45	45	40	40	45	45	45	50	50	50	25	55	55	55	60	60	65	65	70	60	70
Z	5	5	5	10	10	10	10	16	15	20	20	20	30	35	40	45	45	45	45	45	45	25
m	8	1	7	1	4	7	2	1	2	2	4	1	3	2	3	2	4	1	1	1	1	1

Найти совокупный коэффициент линейной корреляции между признаком Z и признаками X и Y ($R_{Z, XY}$), а также частные коэффициенты корреляции

$$r_X(Z, Y) \text{ и } r_Y(Z, X).$$

ОТВЕТЫ

2. См. рис. 102. **3.** 1) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; 2) $x = \frac{1}{5}$; 3) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 4) уравнение имеет мнимые корни; 5) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{3}$; 6) $x_1 = x_2 = 4$; 7) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, x_3 и x_4 — мнимые корни; 8) $x_1 = 0$, $x_2 = -7$. **4.** 1) $A_1(-2)$; 2) $A_2(-8)$; 3) $A_3(6)$. Точки A и B называются

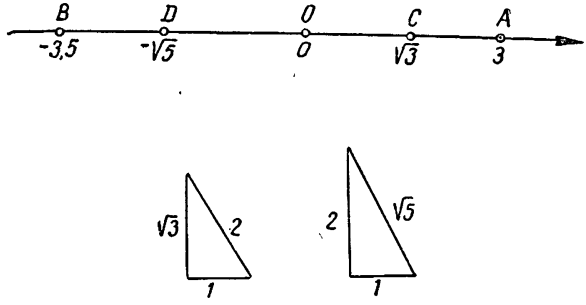


Рис. 102

симметричными относительно точки C, если они расположены на прямой по разные стороны от точки C и находятся на равных расстояниях от нее. **8.** 1) 3; 2) 5; 3) $-6{,}9$; 4) -4. **9.** 1) 4; 2) 7; 3) 4; 4) 3. **10.** 1) $AB = 3$, $BC = 3$, $CD = 2$, $DA = -8$; 2) $|AB| = 3$, $|BC| = 3$, $|CD| = 2$, $|DA| = 8$; 3) 0; 4) 16. **12.** $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{3}{5}$. **13.** $C\left(\frac{1}{2}\right)$; $C(0)$; $C(-2)$; $C(-7)$; соответствующей точки деления нет; $C\left(5\frac{1}{2}\right)$. **14.** $A\left(7\frac{3}{4}\right)$. **15.** 1) 3,5; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 0. **17.** Указание. При построении точки E воспользуйтесь результатами задачи 2. **18.** 1) $A\left(\frac{1}{9}; \frac{5}{9}\right)$; 2) $B(8; 4)$, $C(4; 8)$; 3) $D(0; 0)$, $E(2; 2)$. **19.** 1) $(-2; -12)$, $(-1; -7)$, $(0; -2)$, $(1; 3)$, $(3; 13)$; 2) $(-2; 5)$, $(-1; 2)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(3; 10)$. **20.** 1) $A_1(3; 2)$; 2) $A_2(-3; -2)$; 3) $A_3(-3; 2)$; 4) $A_4(2; -3)$. **21.** $(-5; 3)$. **22.** $(\sqrt{2}; 0)$, $(0; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};$

0). (0; $-\sqrt{2}$). **23.** $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. **24.** (0; 8), (2,5; 0), (— 2,5; 0). **27.** $3\sqrt{5}$. **28.** 1) $\sqrt{37}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{30{,}16}$; 4) 8. **29.** $AB=\sqrt{10}$, $BC=5$, $AC=3$; $\angle BAC$. **30.** $AB^2+AC^2=BC^2$, т. е. $\angle A=90°$. **31.** $AB=BC=2\sqrt{13}$. **32.** $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$. **33.** $A(1; 7)$, $A_1(7; 1)$. **34.** (14; 0), $\left(0; 4\frac{2}{3}\right)$. **35.** (0; 4). **36.** (1; 1). **37.** $M(0; -2)$. **38.** $M\left(4\frac{1}{4}; 0\right)$. **41.** $\left(-1; -\frac{5}{4}\right)$, (— 6; — 10). **42.** 1) (— 0,5; 6,5); 2) (0,5; — 1); 3) (0,5; 0,5). **43.** $(2x_2-x_1; 2y_2-y_1)$. **44.** (6; 5), (0; — 1), (—4; 1). **45.** (0,5; 2), (3; 3), (1,5; 4). **46.** 7. **47.** (— 9; 11). **48.** (— 2; 1), (4; — 5). **49.** $\sqrt{15{,}25}$, $\sqrt{14{,}5}$, $\sqrt{21{,}25}$; $\left(2\frac{2}{3}; 2\right)$. **50.** (10; 17). **51.** (0,4; 4,2). **52.** (1,6; 6,4). **53.** (3,8; 0,6). **54.** $\left(2\frac{1}{3}; -2\frac{2}{3}\right)$, $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. **55.** (1; — 1). Указание. Сначала найдем центр тяжести для двух грузов весом, например, 50 и 70 $\Gamma\left(\lambda=\frac{7}{5}\right)$, а затем будем искать центр тяжести для грузов весом 30 Γ с точкой приложения $A(-1; 0)$ и весом 120 Γ с найденной уже точкой приложения ($\lambda=4$). **57.** (1,6; 1,6). **60.** $x=\frac{y^2}{2}+2$. **61.** $x^2+y^2=36$. Точки A, B, E лежат на окружности, точки C, D не лежат. **62.** Четыре точки: (3; 2), (3; — 2), (— 3; 2), (— 3; — 2). **63.** $x+5y-3=0$. **64.** $8x+2y-17=0$. Точки C, E лежат на линии, точки B, D не лежат. **65.** $y=\pm 5x$. **66.** $y=\pm\frac{1}{3}x$. **67.** $y^2-10y-12x+61=0$. **68.** Кривая проходит через точку A и не проходит через точки B, C. Точки пересечения кривой с осями координат следующие: (0; 5) и ($\pm\sqrt{2{,}5}$; 0). **69.** $y=\pm x$. **70.** $x^2+y^2=4$. **72.** 1) (0; 5), $\left(\frac{5}{4}; 0\right)$; 2) (0; — 4), $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$; 3) (4; 0), 4) (0; — 3), $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$; 5) (0; 0); 6) ($n\pi$; 0), где n — целое число; 7) (0; — 3), (— 1,5; 0); 8) (0; 2), ($-\sqrt[3]{2}$; 0). **83.** Прямая проходит через точки B, E и не проходит через точки A, C, D. **84.** $y^2+4y-2x+11=0$. **85.** $y=\pm(2x+6)$. **86.** $y=-x\sqrt{3}+5$. **87.** $x=-5$. **88.** $y=\sqrt{3}x-4$. **89.** $k=1$; $b=1{,}1$; $y=x+1{,}1$. **90.** $y=3$. **91.** $x=-5$. **92.** $y=3x+4$. **93.** $5x+y-13=0$. **94.** $y=2x-5$. **95.** $y=-\frac{5}{3}$. **96.** $y=0$, $y=2$, $y=x+3$, $y=-x+3$. **97.** 1) $y=4$; 2) $y=x+1$; 3) $y=\sqrt{3}x+4-3\sqrt{3}$; 4) $y=7-x$. **98.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$. **99.** Два решения: 1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$; 2) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2{,}5}=1$. **100.** 1) $b=-a$; 2) $b=-\sqrt{3}a$; 3) $b=a$. **101.** 6 кв. ед. **102.** $y=-\frac{1}{4}x$. **103.** 1) $y=x+2$; 2) $y=9x+5$; 3) $x=1$; 4) $y=-5$; 5) $y=-2x+4$. **104.** $y=8x$. **105.** $y=-\frac{3}{2}x$ или $3x+2y=0$. **106.** $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$, $x+7y-5=0$. **107.** 1) не лежат; 2) не лежат; 3) лежат;

4) не лежат **108.** $C\left(0;\ 3\frac{2}{9}\right)$ **115.** Прямая через точки A, C проходит, через точки B, D не проходит. **116.** 1) $k=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$; 2) $k=-\frac{7}{6}$, $b=\frac{5}{6}$; 3) $k=-\frac{4}{3}$, $b=4$; 4) $k=0$, $b=2$; 5) $k=-\frac{2}{5}$, $b=0$; 6) $k=\frac{2}{5}$, $b=0$. **117.** 1) $\frac{x}{-7}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{12}+\frac{y}{-1,5}=1$; 3) $\frac{x}{-0,6}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{\frac{10}{3}}+\frac{y}{3}=1$. **118.** $\left(0;\ -\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$. **119.** 1) $k=1$; 2) $k=2$; 3) $k=-1.5$; 4) $k=-0,35$; 5) $k=-\frac{2}{3}$; 6) $k=-2$. **120.** Условие параллельности выполняется в каждом случае, например для первого случая $k_1=k_2=-6$. **122.** Условие перпендикулярности выполняется во всех случаях. **123.** 1) $(1;\ -2)$; 2) $\left(-4\frac{1}{3};\ 2\frac{1}{3}\right)$; 3) $(-1;\ 0,5)$; 4) $(2,\ -3)$; 5) $(-2;\ 1)$. **125.** $9x+3y+5=0$. $3x+y-15=0$. **126.** 1) $\frac{\pi}{4}$, 2) 0; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 0; 5) $\pi-\operatorname{arctg}7$; 6) $\operatorname{arctg}0,5$; 7) $\operatorname{arctg}0,25$. 8) $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2$. **127.** $y=\frac{1}{3}x$. **128.** $(-3,4;\ 1,8)$, $\left(6;\ -\frac{4}{3}\right)$ $\left(-\frac{11}{6};\ -\frac{4}{3}\right)$, $\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\pi-\operatorname{arctg}2$. **129.** $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}5\approx 101°19'$. **130.** $3x+2y-13=0$. **131.** $2x+y-7=0$. **132.** $4x+10y+1=0$. **133.** $3x-2y-12=0$. **134.** $4y+11x-18=0$. **135.** $12x+3y-2=0$. **136.** $y=(1+\sqrt{2})x$ или $y=(1-\sqrt{2})x$. **137.** 1) $\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}-5=0$; 2) $-\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}-5=0$; 3) $-\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{y}{2}-5=0$; 4) $\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{y}{2}-5=0$. **138.** 1) $\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{5}{\sqrt{13}}=0$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$; 3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\sqrt{5}=0$; 4) $\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y-\frac{2}{\sqrt{10}}=0$; 5) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$. **139.** Прямые 3, 4, 5 и 6 заданы нормальными уравнениями, так как сумма квадратов коэффициентов при x и y равна единице и свободный член отрицательный. **140.** 1) $\frac{4\sqrt{13}}{13}$; 2) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; 3) 0; 4) $\sqrt{2}$; 5) 3; 6) 5. **141.** $\sqrt{5}$ **142.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **143.** $k_1=k_2=\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **144.** $k=\pm\frac{\sqrt{14}}{7}$. **145.** 1) 3; 2) 4,6; 3) 4,2; 4) 4. **146.** 1) $\frac{7\sqrt{13}}{13}$; 2) 0; 3) $\frac{7\sqrt{13}}{13}$; 4) $\frac{9\sqrt{13}}{13}$; 5) 0. **147.** $\frac{31\sqrt{34}}{34}$. **148.** Обе точки и начало коор-

динат лежат по одну сторону от прямой. **149.** Точки A и B лежат по одну сторону от прямой, а точка C — по другую. **150.** $4x-5y+9=0$; $x=0$; $F(0;\ 1{,}8)$. **151.** $2x+10y-11=0$, $10x-2y+3=0$. **152.** $3x-4y+20=0$, $3x-4y=0$. **153.** $5\sqrt{5}$. **154.** 1) $3x-4y-4=0$; 2) $y=\frac{3}{4}x-1$; 3) $\frac{x}{\frac{4}{3}}+\frac{y}{-1}=1$; 4) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{4}{5}=0$. **155.** 8,5. **156.** 3,6. **157.** $x+y+1=0$. **158.** $3x+6y+14=0$, $6x+12y-7=0$. **159.** 1) $a=\frac{3}{14}$; 2) $a=-\frac{21}{32}$. **160.** $b=-\frac{10}{3}$. **161.** $(-1;\ 2)$. **162.** $4x-3y-1=0$. **163** Если $k_1=k_2+b$, то условия одинаковые, при $k_1<k_2+b$ выгоднее пользоваться услугами базы A, при $k_1>k_2+b$ наоборот. **164.** 1) $a=\frac{b}{\sqrt{3}}$; 2) $a=b\sqrt{3}$. **165.** $(2;\ -3)$. **166.** $m=1{,}5$. **167.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$. **168.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. **169.** $\frac{\pi}{2}$. **170.** $9x-y-65=0$, $x+9y-71=0$, $9x-y+17=0$, $x+9x+11=0$. **171.** $x=1$, $x=6$, $y=-2$, $y=3$. **172.** $(6;\ 4)$; $5x+3y-42=0$. **173.** $4x+3y-16=0$, $3x-4y-12=0$, $4x+3y+9=0$, $3x-4y+13=0$. **174.** $(13;\ -6)$. **175.** $(0;\ 2)$, $(4;\ 0)$, $(2;\ 4)$, $(-2;\ 6)$. **176.** $3x-5y+5=0$; $45°$. **177.** $x+y-7=0$, $x-y-5=0$, $3x+y-13=0$, $5x-3y-19=0$; $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2560}}{9}\approx 5{,}62$; $\sqrt{34}$; $A\approx 75°58'$. **178.** $y=x-2$. **179.** $5x+y-34=0$. **180.** $x+2y-7=0$, $x-y+2=0$, $x-4y-1=0$. **181.** $x+3y-5=0$, $x-y+7=0$, $x+y-7=0$. **182.** $3x-3y-8=0$. **183.** 1) Второго порядка; 2) третьего; 3) второго; 4) первого, 5) второго; 6) третьего. **186.** Точки 1 и 2 лежат внутри круга, ограниченного данной окружностью; точки 5 и 6 — вне круга; точки 3 и 4 лежат на окружности. **187.** 1) $(x-3)^2+(y+5)^2=16$; 2) $x^2+(y-2)^2=9$; 3) $(x+3)^2+y^2=49$; 4) $(x-1)^2+(y-3)^2=29$; 5) $x^2+(y+3)^2=0{,}49$. **188.** 1) $(x-3)^2+y^2=9$; 2) $(x+1)^2+(y+2)^2=5$; 3) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$; 4) $(x+4)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{137}{4}$; 5) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{61}{16}$. **189.** 1) $(2;\ 0)$, $r=1$; 2) $(0;\ -2{,}5)$, $r=\frac{\sqrt{33}}{2}$; 3) $(-3;\ 0)$, $r=3$; 4) $(0;\ 2)$, $r=2$; 5) $(1{,}5;\ -3)$, $r=3{,}5$; 6) $\left(-1;\ \frac{2}{3}\right)$, $r=\frac{4}{3}$. **190.** 1) Уравнению удовлетворяют координаты единственной действительной точки $O(0;\ 0)$; 2) мнимое геометрическое место точек, т. е. не существует ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяли бы данному уравнению; 3) единственная действительная точка $(2;\ -1)$, координаты которой удовлетворяют данному уравнению; 4) уравнение окружности с центром в точке $C(-1;\ -2)$ и радиусом $R=3$; 5) мнимое геометрическое место точек; 6) уравнение окружности с центром в точке $C(0;\ 1)$ и радиусом $R=1$; 7) уравнение окружности с центром в точке $C(-7;\ 0)$ и радиусом $R=7$; 8) совокупность обеих биссектрис координатных углов. **191.** $(x+2)^2+(y+1)^2=25$. Точки A, C, D, E лежат внутри круга; точка B — вне круга и точка F — на окружности. **192.** $(x+2)^2+(y-3)^2=8{,}1$. **193.** $x^2+y^2+3y-4=0$.

194. $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$. 195. $(x+1)^2+(y+2)^2=52$. 196. $(x-6)^2+(y-5)^2=25$. 197. $4x+2y-5=0$. 198. $(x-1)^2+(y+1)^2=1$. 199. $(x+2)^2+(y-1{,}5)^2=6{,}25$. 200. 1) $\sqrt{34}$; 2) 1. 201. 1) Окружность касается оси абсцисс в точке (0; 0) и пересекает ось ординат в точках (0; 0) и (0; 4); 2) ось абсцисс пересекает окружность в точках $(2+\sqrt{11};\ 0)$ и $(2-\sqrt{11};\ 0)$, ось ординат пересекает окружность в точках (0; 1) и (0, —7); 3) окружность не имеет действительных точек пересечения с осями координат. 202. 1) Прямая пересекает окружность в точках (0,4; 2,2) и (— 1; — 2); 2) не пересекаются. 203. 2. 204. $x^2+y^2-5x=0$. 205. $4x+3y-5=0$. 206. $x^2+y^2+7y=0$. 207. $(x+5)^2+(y-3)^2=9$ или $(x+5)^2+(y+3)^2=9$. 208. (5; 0), (— 1, 0). 209. $(0;\ -1+\sqrt{2})$, $(0;\ -1-\sqrt{2})$. 210. $(x-1)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$. 211. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ или $(x-10)^2+(y+10)^2=100$. 212. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. 213. $(x-4)^2+(y-6)^2=4$. 215. 1) (0; — 4); 2) (0; 2); 3) (4; — 4); 4) (4; 2). 216. $O_1(-8,\ -2)$. 217. $2X-4Y-1=0$. 218. $X^2+Y^2=16$. 222. $F(2;\ 0)$. 223. $F(0;\ 1{,}5)$. 224. $F(-1;\ 0)$: $x=1$. 225. $x=-2{,}25$. 227. $y^2=16x$ или $x^2=16y^2$. 228. $y^2=6x$ или $x^2=6y$. 229. 1) $y^2=-4{,}5x$; 2) $x^2=-2{,}25y$; 3) $x^2=\frac{4}{3}y$. 230. 1) (0; 0), (2; 2); 2) (2; 2), (18; — 6); 3) (4,5; 3); 4) (8; — 4). 231. 1) $y^2=12{,}5x$; 2) $x^2=16y$; 3) $x^2=-12y$. 232. $p=12$ *м*. 233. Фокус лежит на оси симметрии зеркала на расстоянии 7,5 *см* от вершины. 234. $y^2=2x$; $9\frac{1}{3}$. 235. $16\sqrt{2}$. 237. 1) (— 1; — 10); 2) (3; 16); 3) (— 3; — 4); 4) (10; 2). 238. 1) $X^2=Y$; 2) $X^2=-Y$; 3) $X^2=\frac{1}{2}Y$; 4) $Y^2=\frac{1}{3}X$; 5) $Y^2=4X$; 6) $Y^2=X$. 239. $Y^2=10X$. 240. $12x^2+36x+y+25=0$. 241. $y^2-16y+5x+29=0$. 242. $y^2=2px+p^2$. 243. $x^2=2py+p^2$. 244. $O_1\left(\frac{1}{2};\ -2\right)$, (2; — 2); $y=-2$; $x=-1$. 245. $O_1\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{13}{16}\right)$; $x=-\frac{1}{2}$; $y=1\frac{3}{16}$. 249. Гиперболы 1 и 2 называются сопряженными. Уравнению соответствует совокупность двух осей координат. 250. $xy=-9$, $A(-3;\ 3)$, $A_1(3;\ -3)$, $d=6\sqrt{2}$ (см. рис. 103). 251. 1) $XY=3$; 2) $XY=-\frac{5}{9}$. 252. (1,5; 3,5). 253. $XY=-10$. 254. $(\pm\sqrt{11}-3;\ \mp\sqrt{11}+2)$. 255. $XY=-11$; $O_1(-3;\ 4)$. 256. В новой системе координат уравнение гиперболы: $XY=-\frac{25}{4}$; ее вершины $A\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right)$, $A_1\left(\frac{5}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$; оси: $Y=-X$, $Y=X$. В прежней системе координат: вершины $A(-4;\ 3)$, $A_1(1;\ -2)$; оси $x+y+1=0$, $x-y+2=0$. 257. $xy-3x+2y-10=0$. 258. $(x-8)^2+(y+9)^2=100$. 259. Окружность $x^2+y^2=4x$. 260. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$. Указание. За ось x принимаем прямую, соединяющую фокусы. Начало координат выбираем посредине между фокусами. 261. Эллипс $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$. 262. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$. Выбор

осей тот же, что и в задаче 260. Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней* и ее каноническое уравнение имеет такой вид: $x^2 - y^2 = a^2$.

263. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$. **264.** Равносторонняя гипербола $2xy + 2x - 9 = 0$.

265. 1) $\frac{X^2}{9} + Y^2 = 1$; 2) $X^2 + Y^2 = 4$; 3) $2Y = -3X^2$; 4) $X^2 = 2Y$; 5) $X^2 = 5Y$; 6) $XY = 4$. **267.** $p = -8$, $q = -6$. **268.** $4p\sqrt{3}$. **269.** $y = x^2 - 1$; $S = 8$. **270.** $XY + 5X + 3Y + 18 = 0$; (3; -1), ($-0{,}6$; 5). **271.** $8\sqrt{2}$. **272.** $S = 12$. **273.** $x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0$. **274.** $4\sqrt{2}$. **275.** $d = \frac{5}{4}$.

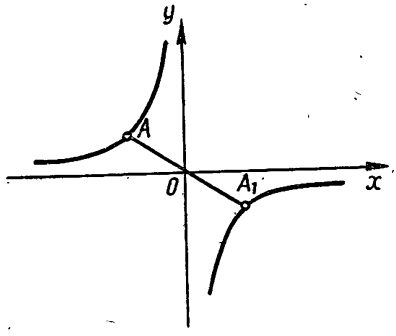


Рис. 103

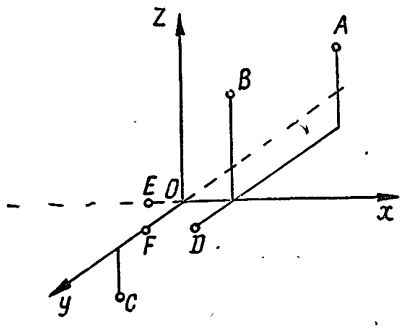


Рис. 104

276. $3x - 4y + 6 = 0$. **278.** См. рис. 104. Точка A находится в IV октанте, точка B — в плоскости xOz, точка C — в плоскости yOz, точка D — в плоскости xOy, точка E лежит на оси Ox и точка F — на оси Oy. **279.** Относительно плоскости xOy: (2; -3; -1), (a; b; $-c$), относительно плоскости yOz: (-2; -3; 1), ($-a$; b; c), относительно плоскости xOz: (-2; 3; 1), (a; $-b$; c), относительно оси Ox: (2, 3; -1), (a; $-b$; $-c$), относительно оси Oy: (-2; -3; -1), ($-a$; b; $-c$), относительно оси Oz: (-2; 3; 1), ($-a$; $-b$; c); относительно начала координат: (-2; 3; -1), ($-a$; $-b$; $-c$). **280.** 1) На плоскости, делящей пополам двугранный угол между плоскостями xOz и yOz; 2) на плоскости, делящей пополам двугранный угол между плоскостями xOy и xOz; 3) на плоскости, делящей пополам двугранный угол между плоскостями xOy и yOz. **281.** В плоскости yOz, в плоскости xOz, в плоскости xOy, на оси Ox на оси Oy, на оси Oz. **282.** (0; 0; 0), (a; 0; 0), (0; a; 0), (a; a; 0), (0; 0; a), (a; 0; a), (a; a; a), (0; a; a). **283.** $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; a\right)$, $\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; a\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; a\right)$, $\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; a\right)$. **285.** $OA = 5\sqrt{2}$, $d_x = \sqrt{41}$, $d_y = \sqrt{34}$, $d_z = 5$. **286.** $\sqrt{41}$. **287.** $\left(0; -\frac{5}{8}; 0\right)$. **288.** $AB = AC = 3$, $BC = 3\sqrt{2}$. **289.** (1; -2; 4), $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; \frac{15}{4}\right)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{4}; \frac{13}{4}\right)$. **290.** $C\left(3; -\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$. **291.** Приведем векторы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ к общему началу O

и построим на этих векторах параллелограмм $OACB$: $\overline{OC}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ и $\overline{BA}=\bar{\alpha}-\bar{\beta}$ (рис. 105, *а*); либо применим правило треугольника (рис. 105, *б*): $\overline{OB}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ $\overline{ON}=\bar{\alpha}-\bar{\beta}$. **293.** $\overline{AB}\neq\overline{BC}$ $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{BC}=\overline{AD}$ $\overline{CB}\neq\overline{AD}$, $\overline{AB}\neq\overline{CD}$ **294.** $\overline{BC}=\bar{q}$ $\overline{CB}=-\bar{q}$, $\overline{CD}=-\bar{p}$, $\overline{DC}=\bar{p}$, $\overline{AC}=\bar{p}+\bar{q}$, $\overline{CA}=-(\bar{p}+\bar{q})$, $\overline{BD}=\bar{q}-\bar{p}$, $\overline{DB}=\bar{p}-\bar{q}$, $\overline{AO}=\frac{\bar{p}+\bar{q}}{2}$, $\overline{OA}=-\frac{\bar{p}+\bar{q}}{2}$, $\overline{CO}=-\frac{\bar{p}+\bar{q}}{2}$, $\overline{OC}=\frac{\bar{p}+\bar{q}}{2}$, $\overline{BO}=\frac{\bar{q}-\bar{p}}{2}$, $\overline{OB}=\frac{\bar{p}-\bar{q}}{2}$. **296.** См. рис. 106;

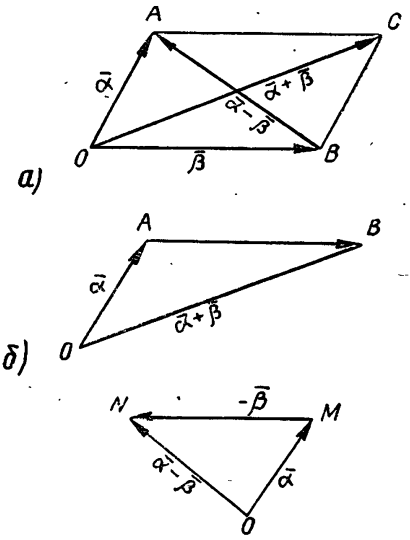


Рис. 105

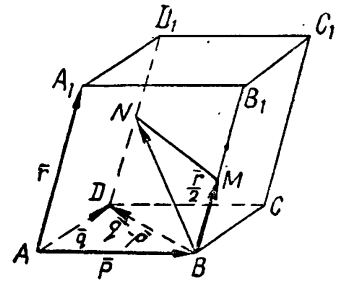


Рис. 106

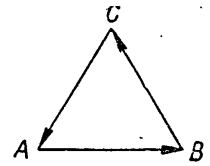


Рис. 107

$\overline{AC_1}=\bar{p}+\bar{q}+\bar{r}$, $\overline{C_1A}=-(\bar{p}+\bar{q}+\bar{r})$, $\overline{BD_1}=\bar{q}-\bar{p}+\bar{r}$, $\overline{D_1B}=\bar{p}-\bar{q}-\bar{r}$, $\overline{A_1C}=\bar{p}+\bar{q}-\bar{r}$, $\overline{CA_1}=\bar{r}-\bar{p}-\bar{q}$, $\overline{BN}=\bar{q}-\bar{p}+\frac{1}{2}\bar{r}$. **297.** $\overline{OA}=3\bar{m}$, $\overline{OB}=5\bar{n}$, $\overline{OC}=3\bar{m}+5\bar{n}$, $\overline{AB}=5\bar{n}-3\bar{m}$, $\overline{CB}=-3\bar{m}$, $\overline{AC}=5\bar{n}$. **298.** $\overline{OP}=2{,}5\bar{n}$ $\overline{OQ}=1{,}5\bar{m}+5\bar{n}$, $\overline{AP}=2{,}5\bar{n}-3\bar{m}$, $\overline{AQ}=5\bar{n}-1{,}5\bar{m}$, $\overline{PQ}=1{,}5\bar{m}+2{,}5\bar{n}$. **299.** $\overline{AB}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$, $\overline{BC}=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$, $\overline{CD}=\frac{\bar{b}-\bar{a}}{2}$, $\overline{DA}=-\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$. **300.** $\bar{p}=\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$, $\bar{b}=2\bar{p}-\bar{c}$. **301.** $\overline{AD}=\frac{m}{m+n}\bar{b}+\frac{n}{m+n}\bar{c}$. **302.** Из рис. 107 видно, что искомым условием является $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, так как тогда и только тогда ломаная линия $ABCA$ замкнется и образует треугольник. **320.** $2\bar{i}$; 0; $-3\bar{k}$ **321.** $\bar{a}=3\bar{k}-2\bar{j}$. **322.** 1) Координаты вектора 2; −3; 5, компоненты его $2\bar{i}$, $-3\bar{j}$, $5\bar{k}$; 2) координаты вектора 1; 0; 4, компоненты его $\bar{i}$; 0; $4\bar{k}$; 3) координаты вектора 0; −1; 2, компоненты его 0; $-\bar{j}$; $2\bar{k}$. **323.** $\bar{a}+\bar{b}=\{-1;\ 4;\ -2\}=-\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}$; $\bar{a}-\bar{b}=\{5;\ -4;\ 8\}=5\bar{i}-4\bar{j}+8\bar{k}$; $3\bar{a}-4\bar{b}=\{18;\ -16;\ 29\}=18\bar{i}-16\bar{j}+29\bar{k}$. **324.** $\bar{p}=\{-2;\ 0;\ 4\}$, $\bar{q}=\{1;\ 5;\ -9\}$ **325.** Век-

тор $\bar{m}$ коллинеарен с осью абсцисс, вектор $\bar{q}$ — с осью ординат, вектор $\bar{p}$ — с осью аппликат. Векторы $\bar{d}$, $\bar{q}$, $\bar{m}$ параллельны плоскости xOy, векторы $\bar{b}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ — плоскости yOz, векторы $\bar{c}$, $\bar{p}$, $\bar{m}$ — плоскости xOz. **326.** Координаты $X=-4$; $Y=4\sqrt{3}$; $Z=0$; компоненты $-4\bar{i}$; $4\sqrt{3}\bar{j}$; 0. **327.** $B(5; -5, 3)$. **328.** $\overline{AB}=\{4; 3; -1\}$. **329.** $C(-6; -6; -2)$. **330.** $\overline{AB}\{-4; 5; -5\}$; $\overline{BA}\{4, -5; 5\}$; $\overline{AC}\{1; 2; 4\}$; $\overline{BC}\{5; -3; 9\}$; компоненты $-4\bar{i}$; $5\bar{j}$; $-5\bar{k}$; $4\bar{i}$, $-5\bar{j}$; $5\bar{k}$; $\bar{i}$; $2\bar{j}$; $4\bar{k}$; $5\bar{i}$; $-3\bar{j}$; $9\bar{k}$; $|\overline{AB}|\approx 8{,}12$, $|\overline{AC}|\approx 4{,}58$, $|\overline{BC}|\approx 10{,}72$. **331.** 1) Неколлинеарны; 2) неколлинеарны; 3) равнонаправлены, $a:b=1:2$; 4) противоположно направлены, $a:b=2:1$; 5) неколлинеарны; 6) равнонаправлены, $a:b=2:3$. **332.** 1) Перпендикулярны; 2) перпендикулярны; 3) не перпендикулярны; 4) не перпендикулярны. **333.** $D(-5; 7; -7)$. **334.** Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, так как условие коллинеарности векторов выполнено, а векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ неколлинеарны. Следовательно, точки A, B, C, D — вершины трапеции. **335.** $\cos\alpha\approx -0{,}9486$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma\approx 0{,}3162$; $\alpha\approx 161°33'$, $\beta=90°$, $\gamma\approx 71°34'$. **336.** $\alpha\approx 122°19'$, $\beta\approx 36°41'$, $\gamma\approx 74°30'$. **337.** Два решения: $\gamma_1=60°$; $\gamma_2=120°$. **338.** $a^2=25$, $b^2=36$, $\bar{a}\bar{b}=-15$. **339.** $a^2=29$, $a=\sqrt{29}\approx 5{,}4$. **340.** 14. **341.** -7. **342.** $\bar{a}\bar{b}=2-6-12=-16$.

343. $\cos\widehat{(\bar{p}, \bar{q})}\approx -0{,}655$. **344.** 135°. **345.** $\text{пр}_{\bar{c}}\,\bar{b}=\dfrac{\bar{b}\bar{c}}{c}=\dfrac{(2\bar{j}-\bar{i})(3\bar{i}-4\bar{j})}{|3\bar{i}-4\bar{j}|}=-2{,}2$.

346. $\frac{10}{3}$. **347.** Два решения: $\bar{a}_1=\{5; 2; -3\}$; $\bar{a}_2=\{-5, 2, -3\}$. **348.** $\bar{a}^0=\dfrac{\bar{a}}{a}=\dfrac{2}{3}\bar{i}-\dfrac{1}{3}\bar{j}-\dfrac{2}{3}\bar{k}$. **349.** $\bar{b}^0=\dfrac{2}{3}\bar{i}+\dfrac{1}{3}\bar{j}-\dfrac{2}{3}\bar{k}$. **350.** $\left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$; $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$; $\left\{\frac{3}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right\}$. **351.** 123°10′, 19°29′, 37°21′. **352.** 1) 76°22′, 76°22′, 27°16′; 2) 3; 3; $\sqrt{2}$; 3) 49°40′. **357.** 1) Сфера, радиус которой $R=1$ и центр совпадает с началом координат; 2) прямой круговой цилиндр с радиусом $R=2$ и осью, параллельной оси Oz; 3) совокупность двух плоскостей $y=1$, $y=-1$, параллельных плоскости xOz и проходящих от нее на расстоянии, равном единице масштаба; 4) совокупность плоскостей, проходящих через ось Oz и делящих пополам двугранные углы, образуемые координатными плоскостями xOz и yOz; 5) начало координат O (0; 0; 0); 6) ось Oz; 7) параболический цилиндр, у которого направляющая есть парабола, лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz. **358.** Данная поверхность трансцендентна; точки A, B, C, D лежат на поверхности; точки E и F не лежат на поверхности. **359.** Точки A, B, C лежат на сфере, точка D внутренняя, точка E внешняя. **360.** 1) Плоскость, проходящая через ось абсцисс и делящая пополам двугранный угол, образуемый координатными плоскостями xOz и xOy; 2) координатная плоскость xOz; 3) совокупность трех координатных плоскостей; $x=0$, $y=0$; $z=0$; 4) совокупность мнимых точек; 5) совокупность двух плоскостей $z=\pm 4$, параллельных координатной плоскости xOy, 6) плоскость xOy 7) точка (2; 0; —3) **361.** Точки A, B, C, лежат на поверхности, точка D на поверхности не лежит. **362.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **363.** 1) $C(2, -1; 0)$, $R=\sqrt{5}$; 2) $C(-1; 0; 0)$, $R=\sqrt{7}$; 3) $C(0; 0; 4)$, $R=4$. **364.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14$. **365.** Цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей $(x+2)^2+y^2=4$, $z=0$. **366.** Плоскость $y=z$. **368.** 1) Ось Ox; 2) прямая, параллельная оси Ox и пересекающая плоскость yOz в точке $(0; a; -2b)$. Пояснение. Уравнение $y-a=0$ представляет плоскость, параллельную плоскости xOz; уравнение $z+2b=0$ — плоскость, параллельную плоскости xOy, 3) прямая, парал-

лельная оси Oy и пересекающая плоскость xOz в точке $(a; 0; 0)$; 4) окружность $x^2+z^2=7$, лежащая в плоскости $y=3$, с радиусом $R=\sqrt{7}$ и с центром в точке $(0; 3; 0)$; 5) данная система уравнений не представляет никакого геометрического образа (плоскость $y=5$ не пересекает сферы $x^2+y^2+z^2=16$); 6) окружность $y^2+(z-a)^2=\frac{3}{4}a^2$, лежащая в плоскости $x=\frac{a}{2}$, с радиусом $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и с центром в точке $\left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$. **369.** Две окружности $x^2+y^2=9$ $(z=\pm 4)$, лежащие в плоскостях $z=4$ и $z=-4$, радиуса $R=3$, центры которых находятся в точках $(0; 0; 4)$ и $(0; 0; -4)$. **379.** Точки A, B, D лежат на плоскости, точка C на плоскости не лежит. **381.** Плоскости 1, 2, 3 параллельны соответственно осям координат Oy, Oz, Ox; плоскости 4, 5, 6 проходят соответственно через оси Oz, Ox, Oy; плоскости 7, 8, 9 параллельны соответственно координатным плоскостям xOz, xOy, yOz; плоскость 10 проходит через начало координат. **382.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1$. **383.** 1) $\frac{2x-y+2z+9}{-3}=0$; 2) $\frac{x-y+7z-2}{\sqrt{51}}=0$; 3) $\frac{3x-4y+5}{-5}=0$; 4) $\frac{x-8y+4z}{9}=0$ (так как $D=0$, то знак нормирующего множителя можно взять любой). **384.** $3x-2y+4z+10=0$. **385.** $2x-y+3z=10$. **386.** 1) $x-2z=0$; 2) $x-3y=0$; 3) $y+z-3=0$; 4) $2x+z-4=0$. **387.** 1) 7; 2) $\frac{5}{9}$. **388.** 5. **389.** Точка C и начало координат находятся по одну сторону от плоскости, точки A, B и начало координат — по разные стороны. **390.** 1) $z=5$; 2) $x=3$; 3) $y=-2$. **391.** $3x-2y+z-19=0$. **392.** $4x+7y-4z=0$. **393.** $2(x-2)-(y+1)-4(z-3)=0$ или $2x-y-4z+7=0$. **394.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$; $\alpha\approx 70°32'$, $\beta\approx 131°49'$, $\gamma\approx 48°11'$. **395.** $3(x-3)+2(y-2)-4(z+4)=0$ или $3x+2y-4z-29=0$. **396.** $d\approx 0{,}80$. **397.** $48°11'$. **398.** 1) 45°; 2) $36°52'$; 3) $70°32'$. **399.** Условие параллельности (11) выполняется. **400.** Условие перпендикулярности (10) выполняется. **401.** $x-2y+z=0$. **402.** $2x-3y+z=7$. **403.** $x+2y+z-2=0$. **404.** $x-3y-5z+1=0$. **405.** $x-2y-z-1=0$. **406.** $3x-4y+2z=0$. **407.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. Взять на одной из плоскостей любую точку и найти расстояние от этой точки до другой плоскости. **408.** $2x+y-3z-14=0$. **409.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1$. **410.** $\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 1\right)$. **416.** 1) $\left(-1; \frac{5}{2}; 0\right)$ и $\left(-\frac{3}{8}; 0; \frac{5}{4}\right)$; 2) если $z=0$, то $t=1$; если $y=0$, то $t=-\frac{2}{3}$. Следовательно, следы прямой на плоскости xOy и xOz — точки $(3; 5; 0)$ и $\left(\frac{14}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$; 3) если $z=0$, то $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=2$, отсюда $x=5$, $y=1$; если $y=0$, то $\frac{x-1}{2}=\frac{z-4}{-2}=1$, отсюда $x=3$, $z=2$. Следовательно, получили две искомые точки $(5; 1; 0)$ и $(3; 0; 2)$. **417.** $(-1; -1; 0)$, $(-0{,}5; 0; 1{,}5)$, $(0; 1; 3)$. **418.** Точка M лежит на прямой, так как координаты этой точки удовлетворяют обоим уравнениям. **419.** Прямая проходит через точку O $(0; 0; 0)$, так как координаты ее удовлетворяют обоим уравнениям. **420.** $z=0$, $x=0$.

421. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{-2}$; $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; $\cos\beta=\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$. 422. $\frac{x}{-2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{-3}$ или $\begin{cases}5x+2y=0,\\3x-2z=0.\end{cases}$ 423. 1) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{5}=t$, отсюда $x=2-2t$, $y=-3+4t$, $z=1+5t$; 2) $x=1+2t$, $y=-1-t$, $z=-2+3t$. 424. $\frac{x-2}{\sqrt{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{-3}$. 425. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{-1}$. 426. 1) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$. 427. 1) Точки A, B, C лежат на одной прямой; 2) точки D, E, F не лежат на одной прямой. 428. $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{7}}{14}\approx-0{,}189$; $\varphi=100°54'$. 429. $\frac{x-2{,}5}{15}=\frac{y+0{,}7}{-1}=\frac{z}{10}$. 430. Указание. Уравнения прямых привести к каноническому виду $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$, $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$; $\cos\varphi\approx-0{,}5456$, $\varphi\approx123°4'$ 431. 1) Параллельны; 2) перпендикулярны. Указание. В примере 2 общие уравнения прямых заменить каноническими. 432. 1) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-5}{1}$ или $\begin{cases}x-2=0,\\y+3=0;\end{cases}$ 2) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-5}{-4}$; 3) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-5}{5}$. 433. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-2}{7}$. 434. $x+y+5z=0$. 435. $4x-13y-7z-16=0$. 436. $5x+4y+2z-1=0$. 437. $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{14}$. 438. $\sin\varphi=\frac{\sqrt{21}}{14}$. 439. $16x+13y+2z+16=0$. 440. $7x+y-4z=9$. 441. $5x+14y-8z+28=0$. 442. 1) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-2}$; 2) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+1}{-3}$; 3) $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{0}$. 443. $3x-2y+4z+1=0$. 444. $x-z+1=0$. Указание. Уравнения прямой можно записать в каноническом виде $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{1}$. 445. 1) (4; -5; 1); 2) (10; 10; -3); 3) (1; 5; 1). 446. (3; -3; 0). 447. $\sqrt{6}$. 448. 1) $\frac{3\sqrt{35}}{7}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Указание. Надо взять на одной из параллельных прямых точку M_0 и найти расстояние от этой точки до другой прямой. 449. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$. 452. 1) 2; 2) $\sqrt{2}-1$; 3) $\lg 2$; 4) $\log_2 5$; 5) 1; 6) 1; 7) 0,5; 8) $\frac{1}{x-1}$ при $x>1$ и $\frac{1}{1-x}$ при $x<1$; 9) $\frac{x-1}{x+1}$ при $|x|>1$ и $\frac{1-x}{x+1}$ при $|x|<1$. 453. 1) $-1<x<+1$; 2) $x\neq0$; 3) $x\leqslant-2$ и $x\geqslant2$; 4) $-3\leqslant x<0$ и $0<x\leqslant3$; 5) $1<x<3$; 6) $a-\delta<x<a+\delta$; 7) $-\infty<x<a-\delta$ и $a+\delta<x<+\infty$; 8) $a-\delta<x<a$ и $a<x<a+\delta$; 9) при любых x; 10) $-1<x<4$; 11) $-1<x<0$; 12) $x<1{,}5$. 457. $f(-2)=-6$; $f(0)=4$; $f(1)=3$; $f(a)=2a^3-3a+4$. 458. $\varphi(-1)=\frac{3}{8}$; $\varphi(1+a)=\frac{2a+1}{a^2+2a-8}$. Функция не опреде-

лена в точках $t=3$ и $t=-3$. **459.** $\psi(0)=5$; $\psi(1)=1$; $\psi(2)=\frac{1}{5}$; $\psi(-2)=125$; $\psi(1{,}5)=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **460.** $f(0)=3$; $f(1)=4$; $f(-2)=7$; $f(\sqrt{2})=5$; $f(3\sqrt{3})=30$, $f(\sqrt{2}-1)=6-2\sqrt{2}$; $f(\sqrt{2}+1)=6+2\sqrt{2}$. **461.** 1; $\operatorname{tg} x$; $\sin 2x$; $\sin 1\approx\sin 57°18'\approx 0{,}8415$; $\sin(-2)=-\sin 2\approx-\sin 114°36'=-\cos 24°36'\approx-0{,}9092$. **462.** x; $1+\sqrt{2}$. **463.** Числа, большие нуля.

464.

1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934
6,64	6,82	7,00	7,17	7,34	7,51	7,69	7,87	8,04	8,22	8,39	8,57	8,75

465. 1) Вся числовая прямая; 2) $x\geqslant 0$; 3) $x\leqslant 2{,}5$; 4) $x>0$; 5) $x<-5$ и $-5<x<0$; 6) все x; 7) $x<1$ и $x>5$; 8) $0<x<1$ и $x>5$; 9) $4\leqslant x\leqslant 6$; 10) $2<x\leqslant 20$; 11) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$; 12) $|x|\geqslant 1$; 13) $0{,}1\leqslant x\leqslant 10$; 14) $2k\pi\leqslant x\leqslant\pi+2k\pi$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$), за исключением $x=0$; 15) $\frac{5-\sqrt{37}}{2}<x<0$ и $5<x<\frac{5+\sqrt{37}}{2}$; 16) $x\leqslant 0$; 17) $x=\pm 6$. **466.** 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет; 7) нет; 8) нет; 9) нет; 10) да. **471.** 1) При $x<0$ монотонно убывает, а при $x>0$ монотонно возрастает (см. рис. 55, *а*); 2) монотонно возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$ (см. рис. 55, *б*); 3) монотонно возрастает при $x>0$; 4) монотонно возрастает в интервалах $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, где $k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$; 5) монотонно возрастает на всей числовой прямой; 6) монотонно возрастает в интервалах $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, где $k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$, и монотонно убывает в интервалах $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, где $k=0,\ \pm 1,\ \ldots$ **475.** Функции 6, 9, 10 четные; функции 3, 8 нечетные; функции 1, 2, 4, 7 ни четные, ни нечетные. **479.** 1) Нет основного периода; 2) π; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{\pi}{3}$; 6) 2π. **485.** 1) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \ldots$; 2) $1,\ -\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{4^2},\ \ldots$; 3) $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \ldots$; 4) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$; 5) $\frac{1}{4},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{13},\ \ldots$ **489.** 1) 1; 2) -1; 3) предел не существует; 4) предел не существует; 5) 0; 6) предел не существует. **498.** 22. **499.** $\frac{5}{33}$. **500.** 0. **501.** ∞. **502.** $\frac{1}{2}$. **503.** $\frac{7}{3}$. **504.** 1. **505.** 1. **506.** 0. **507.** 1. **508.** 0. **509.** $\frac{4}{3}$. **510.** 0. Указание. Воспользуйтесь формулами: $1+2+3+\ldots+n=\frac{1+n}{2}n$; $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **511.** $\frac{1}{5}$. **512.** $\frac{1}{14}$. **513.** $\frac{7}{75}$. **514.** $\frac{1}{2}$. **515.** $-\frac{1}{3}$. **516.** $-\frac{1}{3}$. **517.** $\frac{4}{3}a$. **518.** $10\frac{2}{3}$. **519.** 0,25. **520.** 1. **521.** $\frac{7}{54}$. **523.** 2. **524.** $\frac{1}{3}$. **525.** $\frac{5}{2}$. **526.** k. **527.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **528.** $-\frac{1}{6}$. **529.** $\frac{1}{2}$. **530.** 0,5.

531. $\cos a$. 532. -1. 533. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 534. $\frac{1}{\cos^2 a}$. 535. 0. 536. $-\frac{1}{3}$. 537. 3. 539. 0. 540. -1. 541. 0. 542. 1. 543. $-\frac{1}{3}$. 544. $-\frac{1}{3}$. 545. 1. 546. 0. 547. 0. 548. 0. 549. $-0{,}5$. 550. 0,5. 551. $\frac{1}{4}$. 553. $\frac{1}{e}$. 554. 1. 555. e. 556. e^{-1}. 557. $-e^{-4}$. 558. e^3. 559. e^{-1}. 560. e. 561. $e^{\alpha\beta}$. 562. e. 563. e. 564. $e^{-\frac{2}{3}}$. 565. e^{-1}. 566. e^{-1}. 567. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 568. 1. 569. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0,3. 570. 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$. 571. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$. 572. 1) ∞; 2) 1,5. 573. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. 574. 1) 2; 2) 0,7. 575. 1) 0; 2) 1, если $x \to +\infty$; -1, если $x \to -\infty$. 576. 1) 0; 2) 0. 577. 1) $\frac{2}{3}$; 2) -1. 578. 1) 0; 2) 0. 579. 1) $-\frac{\varphi^2}{2}$; 2) $-0{,}5$. 580. 1) e^3; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; 3) e. 584. 1) $\frac{7}{3}$; 2) 1,2; 3) 24; 4) $\frac{1}{4}$; 5) 1; 6) $-0{,}5$, 7) 1; 8) $\frac{5}{6}$. 587. 1. 588. -1. 589. $+\infty$. 590. 0. 591. Предел не существует. 592. 0. 593. 5; -1. 594. $f(3+0)=f(3-0)=9$, следовательно, предел функции в точке $a=3$ существует и равен 9. 604. 1) 0; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $\sin 1 \approx \sin 57°18' \approx 0{,}8415$; 4) 1; 5) $\frac{2}{\pi}$; 6) 0. 605. 1) $x=-3$ — точка разрыва второго рода, $x=3$ — устранимая точка разрыва; 2) $x=-1$ — точка разрыва второго рода, 3) $x=3$ — точка разрыва второго рода; $x=-1$ — устранимая точка разрыва; 4) $x=0$ — точка разрыва второго рода; 5) $x=0$ — точка разрыва первого рода; 6) $x=1$ — точка разрыва второго рода; 7) функция непрерывна на всем множестве действительных чисел. 606. 1) $x=0$ — точка разрыва первого рода; 2) $x=2$ — точка разрыва первого рода; 3) $x=-1$ — точка разрыва первого рода; 4) функция непрерывна на всей числовой прямой; 5) $x=1$ — точка разрыва второго рода; 6) $x=3$ — точка разрыва первого рода 7) функция непрерывна; 8) $x=2$ — точка разрыва первого рода; 9) $x=-3$ — точка разрыва первого рода; 10) функция непрерывна; 11) $x=0$ — точка разрыва второго рода; 12) $x=0$ — устранимая точка разрыва. 610. 4; $-1{,}25$. 611. 1) 0; 2) -1; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 612. 1) 3; 2,1; 2,01; 2) 6; 6; 6. 613. 1) 0; 2) $\cos x$; 3) $14x$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 5) 3; 6) $-\sin x$. 615. $\varphi'(0{,}1) = -200$; $\varphi'(-2) = -0{,}5$. 616. Предел равен производной функции $f(x)$ в точке O 617. 1) 0; 2) 2; 3) -4 618. 1) (0; 0); 2) $\left(\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{3}; \pm\frac{\sqrt[4]{27}}{27}\right)$; 3) $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \pm\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$. 619. Средняя скорость за промежуток времени Δt. 620. 7. 621. 1 *м/сек*. 622. 102,9 *м/сек*; 1) 98 *м/сек*; 2) 117,6 *м/сек*. 628. $2ax+b$. 629. $49x^6 - 9x^2 - 2x^{-3} + 21x^{-8}$. 630. $40x^4 - 3x^2 + 2x + 1 + 10\,000x^{-101}$. 631. $-(x+1)^{-2}$. 632. $-2(x-1)^{-2}$. 633. $\frac{x(2-x)}{(x^2-x+1)^2}$. 634. $\frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$; $f'(1) = -\frac{1}{4}$. 635. $\frac{-5(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$. 636. $-\frac{4ax}{(a+x^2)^2}$. 637. $-\frac{2(u+1)}{(u^2+2u+3)^2}$;

$\varphi'(0) = -\frac{2}{9}$. 638. $\frac{2t^3(2t^2+3t+4)}{(t^2+t+1)^2}$. 639. $\frac{x^9(10-33x-x^{11})}{(x^{11}+1)^2}$.
640. $\frac{x^2(3-x^4)}{(1+x^4)^2}$. 641. $\frac{4x\sqrt{x}-6}{x^2}$. 642. $\frac{3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{6x}$. 643. $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$;
$f(4) = \frac{1}{36}$. 644. $\frac{8\sqrt[3]{x^2}-15x\sqrt[4]{x}}{12x}$. 645. $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$. 646. $2{,}5x\sqrt{x}+6x$.
647. $1{,}4\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{2}$. 648. $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$; $f(8)=\frac{1}{96}$. 649. $\cos x - \sin x$.
650. $x\cos x + \sin x$. 651. $-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$. 652. $\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$. 653. $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
654. $\frac{1}{1+\cos t}$. 655. $\frac{\cos x - 2x\sin x}{2\sqrt{x}}$. 656. $\frac{x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}$. 657. $\frac{2x(x-\sin 2x)}{(x^2\cos x-\sin x)^2}$.
658. $-\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x(\operatorname{tg} x+\sin x)^2}$. 659. 0. 660. $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 661. $\frac{x}{1+x^2}+$
$+\operatorname{arctg} x$. 662. $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}}$. 663. $\cos x\cdot\arcsin x+\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
664. $-\frac{2+\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arcsin x+1)^2}$. 665. $\frac{\pi}{2(1+x^2)(\operatorname{arcctg} x)^2}$. 666. $\frac{1}{\ln 10\cdot x}$.
667. $\frac{1}{x\ln 7}$. 668. $1+\ln x$. 669. $10^x\ln 10$. 670. $\frac{1-\ln x}{x^2}$. 671. $2^x\ln 2\cdot\ln x+$
$+2^x\cdot x^{-1}$. 672. $e^x(\cos x-\sin x)$. 673. $e^x(\sin x+\cos x)$. 674. $e^x 10^x(1+\ln 10)$.
675. $\frac{13^x\ln 13}{(13^x+1)^2}$. 676. $\frac{2e^x(x\ln x-1)}{x(e^x+\ln x)^2}$. 690. $3\cos(3x+1)$. 691. $16(1+2x)^7$.
692. $a\cos at$. 693. $\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)\ln 10}$. 694. $\frac{9x^{16}(3x^2+2x)}{(3x+1)^{10}}$. 695. $2x\cos x^2$.
696. $-\frac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$. 697. $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$. 698. $-\sin 2x$. 699. $\frac{3\ln^2 x}{x}$.
700. $-2xe^{-x^2}$. 701. 1. 702. 1. 703. $2x\cos x^2\cos(\sin x^2)$. 704. $-500(2-5x)^{99}$.
705. $\frac{-14(x+1)^6}{(x-1)^8}$. 706. $2\ln 10\cdot 10^{2x-3}$. 707. $\frac{3x^2}{(x^3-1)\ln 5}$. 708. 0.
709. $\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$. 710. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 711. $(1+\cos x)\cos(x+\sin x)$. 712. $(3^{-x}-$
$-3^x)\ln 3\cdot\sin(3^x+3^{-x})$. 713. $-15\cos(2-3x)$. 714. $\frac{6x^2+1}{x^2}\sin\frac{6x^2-1}{x}$.
715. $(2x+2^x\ln 2)\cos(x^2+2^x)$. 716. $\frac{9(3x+1)^2}{\cos^2(3x+1)^3}$. 717. $-\frac{\sin x+x\cos x}{\sin^2(x\sin x)}$.
718. $10^{x^2+x+1}(2x+1)\ln 10$. 719. $e^{at}(a\cos bt - b\sin bt)$. 720. $12b(2a+3bt)^3$.
721. $7^{\frac{x\sin x}{1-x}}\frac{(\sin x+x\cos x-x^2\cos x)\ln 7}{(1-x)^2}$. 722. $\frac{6^{\arcsin x}\ln 6}{\sqrt{1-x^2}}$.
723. $-2^{\cos x^2}\sin x^2\cdot 2x\cdot\ln 2$. 724. $-\frac{1+\cos^2 x}{3\sin^3 x}$. 725. $\frac{4a^2x}{a^4-x^4}$. 726. $\frac{1}{1+e^{2t}}$.
727. $\frac{1-\sin x\cdot\sin 2x}{\sin x}$. 728. $\frac{2}{x(x^2+1)}$. 729. $\frac{2a}{a^2-x^2}$. 730. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.
731. $e^x(\operatorname{ctg} x+\ln\sin x)$. 737. $x^{\sin x-1}(x\cos x\ln x+\sin x)$.

738. $(\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$. 739. $(1-\ln x)\,x^{\frac{1}{x}-2}$. 740. $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$.

741. $\dfrac{(x+1)^2(17x^2-58x+41)}{6\sqrt{x-2}(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. 742. $\dfrac{5t-3}{\sqrt{1+t^2}(3t+5)^2}$.

743. $\dfrac{(29x^2+55x+6)(x+1)(x-1)^2}{5\sqrt[5]{x+2}}$. 744. $(\sin x)^{\ln x}\dfrac{\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x\ln x}{x}$.

746. $\dfrac{2}{3}$. 747. $\dfrac{5e^x-2x}{2y}$. 748. $-\dfrac{xb^2}{ya^2}$. 749. $\dfrac{x+2y}{5y-2x}$. 750. $\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$.

751. $\dfrac{\cos(x+2y)}{1-2\cos(x+2y)}$. 752. 1. 753. 1. 754. 0,5. 755. $-0{,}5$. 756. $\dfrac{2e+1}{2e}$.

757. $-e^{-1}$. 758. -2. 759. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. 760. $\dfrac{ny^{n-1}}{(1-y)^{n+1}}$. 761. $\dfrac{-5x^4}{\sqrt{3}}$.

762. $-\dfrac{3y^2+2}{(y^3+2y-1)^2}$. 763. $\dfrac{2(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}$. 764. $\dfrac{3\varphi^4(5b^2-3\varphi^2)}{(b^2-\varphi^2)^2}$.

765. $-\dfrac{1+a}{(1+a)^2}$; $\varphi'(1)=-\dfrac{1+a}{4}$; $\varphi'(0)=-(1+a)$. 766. $\dfrac{2x+a+b}{2\sqrt{(a+x)(b+x)}}$.

767. $3x(2-x)e^{-x}$. 768. $a\omega\cos\omega t - b\omega\sin\omega t$. 769. $-\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\alpha}$.

770. $f'(1)=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$; $f'(0)=\dfrac{1}{2}$. 771. $\dfrac{2x\sqrt{a^2-x^2}-a^2}{(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

772. $2^{-kt}[\omega\cos(\varphi_0+\omega t)-k\ln 2\sin(\varphi_0+\omega t)]$. 773. $-\dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(1+y^2)^4}}$.

774. $\dfrac{4\cos 2x+4\cos 2x\cos^2 x-\sin^2 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}$. 775. $\dfrac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$.

776. $-\dfrac{\sin(x^5+\ln x)(5x^5+1)}{x}$. 777. $3^x\ln 3\operatorname{ctg} 3^x$. 778. $\dfrac{7x^6+7^x\ln 7}{\cos^2(x^7+7^x)}$.

779. $-3\operatorname{tg} 3x$. 780. $\cos(2t+\varphi_0)$. 781. $\dfrac{3}{(3x+2)\ln(3x+2)}$. 782. $\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

783. $\dfrac{5(1+\sqrt{x})^4}{2\sqrt{x}}$. 784. $\dfrac{17t^3-20}{5t(t^3-1)}$. 785. $\dfrac{(x-1)(3x^2-x+2)}{\sqrt{x^2+1}}$. 786. $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

787. $\dfrac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}(1+\ln\ln x)$. 788. $2^{\sin(x+\sqrt{x})}\dfrac{\cos(x+\sqrt{x})\cdot(1+2\sqrt{x})\ln 2}{2\sqrt{x}}$.

789. $2^{3^x}\cdot 3^x\ln 2\cdot\ln 3$. 790. $\dfrac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}$. 791. $\dfrac{3\cos 3x}{2y}$. 792. $-\dfrac{1}{\sin^2(x+y)}$.

793. -2. 796. 1) $-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$; 2) $-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $-\dfrac{4}{(x+1)^3}$; 4) $e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$; 5) $e^{\cos x}(\sin^2 x-\cos x)$; 6) $\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^3 x}$. 797. 1) 0; 2) $5!=120$; 3) 504; 4) $\sin x$; 5) $\cos x$; 6) $256\sin 4x$; 7) $a^4\cos(ax+b)$; 8) $125e^{5x}$; 9) $-4x(3\sin x^2+2x^2\cos x^2)$; 10) e^x; 11) $3^n(\ln 2)^n 2^{3x+5}$; 12) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n\ln 10}$; 13) $2^5\cos 2x$; 14) $n!$. 800. $n!\,a_0$. 805. 1) $y-6x+4=0$, $x+6y-13=0$;

2) $5x+y-8=0$, $x-5y-12=0$; 3) $y-4=\pm 2(x\mp 1)$, $y-4=\mp 0{,}5(x\mp 1)$; 4) $x+y=2$, $y=x$; 5) $2y-4x-2+\pi=0$, $4x+8y-8-\pi=0$; 6) $x-y=1$, $x+y=1$; 7) $x=2$, $y=-1$; 8) $x+y=2$, $y=x$. **806.** $10x+7y+3=0$, $7x-10y+17=0$. **807.** (0; 1). **809.** $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$. **810.** 1) 0; $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$; 2) $\operatorname{arctg} k$; $\operatorname{arctg}\frac{k}{1+2k^2}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $\operatorname{arctg} 2$. **811.** $v_0=1$ *м/сек*, $v_1=7$ *м/сек*, $v_2=13$ *м/сек*, $a_0=a_1=a_2=6$ *м/сек*^{2}. **812.** $t=\frac{k\pi}{\omega}$, $x=\pm 1$. **813.** 43 *а*. **814.** 5; 125; 65 **816.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 1; 0,2; 0,02; 3) 4; 2; $-0{,}2$; 0,02. **817.** $2\cos x\,dx$. **818.** $12x\,dx$. **819.** $g t\,dt$. **820.** $\frac{2\,dx}{\cos^2 2x}$. **821.** $-a\sin(t+2)\,dt$. **822.** $\frac{2\,dx}{(1+x)^2}$. **823.** $a\omega\cos(\omega t+\varphi_0)\,dt$. **824.** $-\frac{dv}{v^2}$. **825.** $\frac{dx}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. **826.** $10^x(1+x\ln 10)\,dx$. **827.** $\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}$. **828.** $\frac{3x^2}{\cos^2 x^3}\,dx$. **829.** $-(2x+3)\sin(x^2+3x+1)\,dx$. **830.** $2^{\arcsin x}\frac{\ln 2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **831.** $(1-u^2)^{-\frac{3}{2}}u\,du$. **832.** $\operatorname{ctg}(x+1)\,dx$. **834.** 1) 5,1; 2) 4,9; 3) 4,987; 4) 2,013; 5) 3,009; 6) $-0{,}0175$; 7) 0,965; 8) 1,767; 9) 1,037; 10) 45°30′; 11) 255,15; 12) $-0{,}03$. **836.** 1) 12,16; 2) 0,587; 3) 0,494. **837.** 3 *см*^{3}. **838.** $\frac{g\Delta H}{\sqrt{2gH}}$. **843.** 1) 1; 2) $\frac{a-1}{\ln a}$. **844.** Нет, так как в точке $x=0$ производная не существует. **848.** $\frac{5}{3}$. **849.** 5. **850.** $\frac{7}{3}$. **851.** $\frac{1}{6}$. **852.** $\frac{8}{3}$. **853.** 2. **854.** -4. **864.** 1. **865.** e^3. **866.** 1. **867.** 1. **868.** e^{-1}. **869.** 1. **870.** $e^{-\frac{\pi}{2}}$. **871.** 1. **873.** На $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$ функция убывает; на $\left(-\frac{1}{2},\ -\infty\right)$ — возрастает. **874.** $(-\infty,\ 0{,}5)$ функция возрастает. **875.** $(-\infty,\ +\infty)$ — возрастает. **876.** $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$ — убывает; $\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ — возрастает. **877.** $(-\infty,\ -1)$ и $(1,\ +\infty)$ — убывает; $(-1,1)$ — возрастает. **878.** $(-\infty,0)$ и $(2,\ +\infty)$ — убывает; $(0,\ 2)$ — возрастает. **879.** $(0,\ e^{-1})$ — убывает; $(e^{-1},\ +\infty)$ — возрастает. **880.** $(-\infty,\ 0)$ — возрастает; $(0,\ +\infty)$ — убывает. **881.** $(-\infty,\ 0)$ — возрастает; $(0,\ +\infty)$ — убывает. **882.** $(-\infty,\ +\infty)$ — возрастает. **884.** $y_{\min}=\frac{3}{4}$ при $x=-0{,}5$. **885.** $y_{\min}=-1$ при $x=1$; $y_{\max}=0$ при $x=0$. **886.** $y_{\min}=\frac{3}{4}a^2$ при $x=-\frac{a}{2}$. **887.** $y_{\min}=-47$ при $x=3$; $y_{\max}=17$ при $x=-1$. **888.** $y_{\min}=-1$ при $x=-1$; $y_{\max}=\frac{1}{3}$ при $x=1$. **889.** $y_{\max}=3$ при $x=1$. **890.** $y_{\max}=0$ при $x=0$; $y_{\min}=-\frac{2}{3}$ при $x=1$. **891.** $y_{\min}=-4$ при $x=1$, $y_{\max}=12$ при $x=-1$; $y_{\min}=-4$ при $x=-3$. **892.** $y_{\max}=0$ при $x=0$. **893.** $y_{\max}=2$ при $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$;

$y_{\min} = 0{,}5$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **894.** Экстремума нет. **895.** $y_{\min} = \frac{e^2}{4}$ при $x = 0{,}5$. **896.** Экстремума нет. **897.** $y_{\min} = -\frac{1}{e}\log_7 e$ при $x = \frac{1}{e}$. **898.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; $y_{\max} = \frac{4}{27}$ при $x = \frac{8}{27}$. **899.** $y_{\min} = 0$ при $x = 1$; $y_{\max} = 4e^{-2}$ при $x = e^2$. **900.** $y_{\max} = e^{12}$ при $x = -3$. **901.** Экстремума нет. **902.** Экстремума нет. **903.** Экстремума нет. **905.** $(-\infty, +\infty)$ — вогнутость; точек перегиба нет. **906.** $(-\infty, 0)$ — выпуклость; $(0, +\infty)$ — вогнутость, $M(0; 1)$ — точка перегиба. **907.** $(-1, 1)$ — вогнутость; $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ — выпуклость; $M_1(1; \ln 2)$, $M_2(-1; \ln 2)$ — точки перегиба. **908.** $(-\infty, 0)$ — выпуклость; $(0, +\infty)$ — вогнутость; $O(0; 0)$ — точка перегиба. **909.** $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ — выпуклость; $\left(-\infty, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ — вогнутость; $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right)$, $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right)$. **910.** $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ — выпуклость. **911.** $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ — выпуклость; $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ — вогнутость $(k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$; абсциссы точек перегиба равны $x = k\pi$. **912.** $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ — вогнутость; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — выпуклость; $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ — абсциссы точек перегиба. **913.** $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **914.** $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ — выпуклость; $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ и $(1, +\infty)$ — вогнутость; абсциссы точек перегиба равны $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$. **915.** $(a-\sigma, a+\sigma)$ — выпуклость; $(-\infty, a-\sigma)$ и $(a+\sigma, +\infty)$ — вогнутость; абсциссы точек перегиба равны $x = a \pm \sigma$. **919.** 1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; точки пересечения кривой с осями координат: $(3+\sqrt{6}; 0)$, $(3-\sqrt{6}; 0)$, $(0; 3)$; $y_{\min} = y(3) = -6$; график — вогнутая кривая; 2) функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; точка пересечения с осью ординат $(0; 5)$; $y_{\min} = y(-0{,}5) = 4{,}75$; график — вогнутая кривая. **920.** 1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, точки пересечения кривой с осями координат: $(0; 1)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}; 0\right)$; $y_{\max} = y\left(\frac{3}{4}\right) = 2\frac{1}{8}$; график — выпуклая кривая; 2) функция непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$; график пересекает оси координат в точках: $(0; 0)$, $(2; 0)$; $y_{\min} = y(2) = 0$, $y_{\max} = y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$; точка перегиба $\left(\frac{4}{3}; \frac{16}{27}\right)$. **921.** 1) Функция непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$; график пересекает оси координат в точках: $(0; 5)$, $(5; 0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 0\right)$; $y_{\min} = y(4) = -1{,}4$, $y_{\max} = y(0) = 5$; точка перегиба $(2; 1{,}8)$; 2) функция непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$; точки пересечения кривой с осями координат: $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(0{,}5; 0)$, $(-1; 0)$; $y_{\min} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx -0{,}35$, $y_{\max} = y\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 2{,}35$; точка перегиба $(0, 1)$; на интервале $(-\infty, 0)$ график выпуклый, а на интервале $(0, +\infty)$ — вогнутый. **922.** Функция непрерывна в интервале

$(-\infty, +\infty)$; точка пересечения кривой с осями координат $(0; 0)$; $y_{\max} = y\left(\frac{4}{3}\right) \approx 4{,}15$, $y_{\min} = y(2) = 4$; на интервале $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ график выпуклый, а на интервале $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ — вогнутый. **923.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точек ± 1, где у нее разрывы второго рода; $(0; -1)$ — точка пересечения с осью ординат; функция четная; $x = \pm 1$ — вертикальные асимптоты, $y = 0$ — горизонтальная; $y_{\max} = y(0) = -1$; на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ график вогнутый, а на интервале $(-1, 1)$ выпуклый. **924.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; точка пересечения с осями координат $(0; 2)$; $y_{\max} = y(-0{,}5) = 2\frac{2}{3}$; точки перегиба: $(0; 2)$ и $(-1, 2)$; $y = 0$ — горизонтальная асимптота. **925.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точек ± 1; функция нечетная; $x = \pm 1$ — вертикальные асимптоты, $y = 0$ — горизонтальная; функция монотонно убывает на всех интервалах непрерывности; точка перегиба $(0; 0)$. **926.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точек $x = \pm 2$, которые являются точками разрыва второго рода; точки пересечения графика с осями координат: $(0; 0{,}25)$, $(1; 0)$; $x = \pm 2$ — вертикальные асимптоты; $y = 0$ — горизонтальная; функция монотонно убывающая на всех интервалах непрерывности. **927.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; график пересекает оси координат в точках $(0; 0)$ и $(4; 0)$; $y_{\max} = y(3) = 6{,}75$; точки перегиба: $(0; 0)$ и $(2; 4)$. **928.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; график пересекает оси координат в точках $(0; -4)$, $(-1; 0)$, $(2; 0)$; $y_{\max} = y(-1) = 0$, $y_{\min} = y(0{,}2) \approx -4{,}20$; абсциссы точек перегиба: $x_1 \approx -0{,}535$, $x_2 \approx 0{,}935$, $x_3 = 2$. **929.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; функция нечетная и монотонно возрастающая; точки перегиба: $(k\pi; k\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **930.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точек $x = (0{,}5 + k)\pi$, которые являются точками разрыва второго рода, $x = (0{,}5 + k)\pi$ — вертикальные асимптоты; функция периодическая с основным периодом, равным π, и монотонно возрастающая; абсциссы точек перегиба $(-1)^{n-1}\, 0{,}383 + \frac{\pi}{2} n$. **931.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$; функция нечетная; $x = 0$ — вертикальная асимптота; $y_{\max} = y(1) = 2$, $y_{\min} = y(-1) = -2$; при $x > 0$ график вогнутый, а при $x < 0$ график выпуклый. **932.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; функция нечетная; точки пересечения с осями координат: $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$; $y_{\max} = y(-1) = \sqrt[3]{2}$, $y_{\min} = y(1) = -\sqrt[3]{2}$; точки перегиба: $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$. **933.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$, которая является точкой устранимого разрыва; функция нечетная; $y_{\max} = y(-e^{-1}) = e^{-1}$, $y_{\min} = y(e^{-1}) = -e^{-1}$; на интервале $(-\infty, 0)$ график выпуклый, а на интервале $(0, +\infty)$ вогнутый; $(\pm 1; 0)$ — точки пересечения графика с осями координат. **934.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, монотонно возрастающая, $\left(\frac{1 - a^2}{2}; 0\right)$ и $(0; \ln a)$ — точки пересечения графика с осями координат; $(0; \ln a)$ — точка перегиба. **935.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$, являющейся точкой разрыва

второго рода; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=0$ — горизонтальная; $y_{\min}=y\,(\log_2 e)=e\ln 2$; график функции в промежутке $(-\infty, 0)$ выпуклый, а в промежутке $(0, +\infty)$ вогнутый. **936.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; (0; 0) — точка пересечения графика с осями координат; $y=0$ — горизонтальная асимптота; $y_{\max}=y\,(3)=27e^{-3}$; абсциссы точек перегиба: $x_1=0$, $x_2=3+\sqrt{3}$, $x_3=3-\sqrt{3}$. **937.** Функция определена и непрерывна при $x>0$; $y_{\min}=y\,(e^{-1})=e^{-e^{-1}}$; график вогнутый; $\lim\limits_{x\to+0} y=1$. **938.** Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой; $y=0$ — горизонтальная асимптота; $x=1$ — ось симметрии; $y_{\max}=y\,(1)=e$; точки перегиба $\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$. **940.** 1) $m=-8$ при $x=-2$; $M=27$ при $x=3$; 2) $m=0$ при $x=0$; $M=6$ при $x=4$; 3) $m=-3$ при $x=2$; $M=22$ при $x=-3$. **944.** Квадрат со стороной $\frac{a}{2}$. **945.** 6 и 6. **946.** 6 и 6. **947.** $2R=H$. **948.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **949.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **950.** Отношение длины к ширине равно 2. **951.** $h=2r$, где h — высота, r — радиус основания. **952.** $p=-4$, $q=5$. **953.** $\frac{h}{2}$; $\frac{b}{2}$. **954.** $\alpha=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **955.** $r=h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$, где r — радиус основания цилиндра, а h — высота. **956.** $a=6$ *дм*, $h=3$ *дм*. **958.** 180°. **959.** Высота прямоугольника должна равняться радиусу полукруга. **960.** $\operatorname{arccos}\frac{1}{k}$. **961.** 20 *км/ч*; 720 руб. **962.** $5\sqrt{2}$. **963.** Ширина $\frac{d}{\sqrt{3}}$ и высота $d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **966.** 1) 2,5; 2) 5; 3) 0. **967.** $x^2+y^2\leqslant 1$ (круг единичного радиуса с центром в начале координат). **968.** Полуплоскость, лежащая ниже прямой $2y-x=0$, и эта прямая. **969.** Точки, не лежащие на прямой $x+y=1$. **970.** Все точки плоскости xOy, не лежащие на прямых $x=1$ и $y=2$. **971.** Точки первого и третьего координатных углов и точки на осях координат. **972.** Точки первой и третьей четвертей, не лежащие на прямых $x=2$, $x=0$, $y=0$. **973.** Точки первого координатного угла и точки луча $y=0$, $x>0$. **974.** $x^2+y^2>1$. **975.** Часть плоскости, содержащаяся между прямыми $x=-3$ и $x=-1$, включая и эти прямые. **977.** 5. **978.** 1. **979.** -3. **980.** 1. **981.** 0. **982.** -1. **983.** 1. **984.** 0. **990.** $z'_x=0$; $z'_y=0$. **991.** $z'_x=-4$; $z'_y=1$. **992.** $z'_x=4$; $z'_y=5$. **993.** $z'_x=0$; $z'_y=1$. **994.** $z'_x=-\frac{1}{54}$; $z'_y=-\frac{1}{54}$. **995.** $z'_x=1$; $z'_y=0$. **996.** $z'_x=yx^{y-1}$; $z'_y=x^y\ln x$. **997.** $z'_x=\cos xy^{\sin x}\ln y$; $z'_y=\sin xy^{\sin x-1}$. **998.** $z'_x=\frac{-2y}{(x-y)^2}$; $z'_y=\frac{2x}{(x-y)^2}$. **999.** $z'_x=\ln y$; $z'_y=\frac{x}{y}+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. **1000.** $z'_x=-\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $z'_y=\frac{x^2}{(x-y^2)}$. **1001.** $z'_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $z'_y=\frac{x}{x^2+y^2}$. **1005.** $du=dx+dy+dz$. **1006.** $dz=2dx+3dy$. **1007.** $du=yzdx+xzdy+xydz$. **1008.** $df(1;2)=\frac{2dx-dy}{4}$. **1009.** $dz=y^x\ln y dx+xy^{x-1}dy$. **1010.** $dz=$

$= 2^y dx + x2^y \ln y dy$. **1011.** $dz = 2xdx + \cos y dy$. **1012.** $dz = \frac{2}{x^2+y^2}(xdx + ydy)$. **1013.** $-0{,}23$. **1014.** 0,98. **1015.** 10,28. **1016.** 2,933. **1017.** 5,003. **1018.** 3,874. **1019.** 104,686. **1022.** $z_{\min} = 0$ в точке (0; 0). **1023.** $z_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y = 0$. **1024.** Экстремумов нет. **1025.** $z_{\min} = 0$ в точке (0; 0). **1026.** $z_{\max} = 1$ при $x = 0$, $y = 0$. **1027.** $z_{\max} = z(2; -2) = 8$. **1028.** $z_{\max} = z(0; 0) = 10$. **1029.** $z_{\min} = z\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{6}\right) = -6{,}625$. **1030.** $z_{\max} = z\left(-\frac{1}{12}; 1\right)$. **1031.** Куб. **1032.** Основание дома — квадрат со стороной $\sqrt[3]{\frac{p+q}{S}V}$. **1033.** Измерения параллелепипеда: $\frac{2R\sqrt{3}}{3}; \frac{2R\sqrt{3}}{3}; \frac{R\sqrt{3}}{3}$. **1034.** Длина равна $\sqrt[3]{2V}$, ширина $\sqrt[3]{2V}$, высота $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$. **1035.** Длина равна $\sqrt{\frac{S}{3}}$, ширина $\sqrt{\frac{S}{3}}$, высота $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$. **1038.** $3x + C$. **1039.** $\frac{x^9}{9} + C$. **1040.** $C - \frac{1}{x^2}$. **1041.** $C - \frac{2}{\sqrt{x}}$. **1042.** $x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + C$. **1043.** $\frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$. **1044.** $\frac{x^3}{3} + x^2 - 4\ln|x| + C$. **1045.** $x^4 - 6x^2 + C$. **1046.** $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x| - x + \frac{3}{x} + C$. **1047.** $C - x - \operatorname{ctg} x$. **1048.** $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$. **1049.** $\frac{2^x}{\ln 2} + C$. (В ответах 1050—1241 ради краткости произвольная постоянная C опущена.) **1050.** $\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt{5}}{3}x\sqrt{x} + x$. **1051.** $\frac{1}{2}\left(x^2 + 5\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)$. **1052.** $\frac{2}{3}\sqrt{x}(x - 3)$. **1053** $x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **1054.** $-\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$. **1055.** $\frac{2}{15}\sqrt{x}(30 + x^2)$. **1056.** $x + \cos x$. **1057.** $e^x - \frac{1}{x}$. **1058.** $x\left(a^2 + abx + \frac{b^2}{3}x^2\right)$. **1059.** $\frac{6^x}{\ln 6}$. **1060.** $x\left(a^3 - \frac{3}{2}a^2bx + ab^2x^2 - \frac{b^3}{4}x^3\right)$. **1061.** $\arcsin\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **1062.** $2\ln|x + \sqrt{x^2-4}| + \frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$. **1063.** $\operatorname{tg} x - 3\cos x$. **1064.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x$. **1065.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{6}}{4}$. **1066.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x + \sqrt{x^2-3}|$. **1067.** $\frac{\sqrt{5}}{20}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{5}}{2x+\sqrt{5}}\right|$. **1068.** $\frac{\sqrt{7}}{14}\ln\left|\frac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}}\right|$. **1069.** $\frac{x^4}{8} + \frac{1}{x^2}$. **1070.** $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$. **1071.** $\cos x - 3\operatorname{ctg} x$. **1072.** $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x$. **1073.** $\frac{x^2}{2} - 4x + 12\ln|x + 4|$. **1074.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}$. **1075.** $2x + 3\ln|x - 2|$. **1076.** $-\frac{1}{2}\cos 2x$. **1077.** $\frac{1}{3}\sin(3x + 4)$. **1078.** $\frac{(3x-5)^{31}}{93}$. **1079.** $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

1080. $\frac{1}{6}\sqrt{(2x^2+5)^3}$. 1081. $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$. 1082 $\frac{2}{15}(3x-4)\sqrt{(x+2)^3}$. 1083. $\frac{1}{3}\sqrt{(a+x^2)^3}$. 1084. $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x$. 1085. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$. 1086. $\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1}$. 1087. $-\sqrt{1+2\cos x}$. 1088. $0{,}3\sqrt[3]{(3+5\sin x)^2}$. 1089. $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]$. 1090. $-2\cos\sqrt{x}$. 1091. 1) $\ln|2+\ln x|$; 2) $\frac{1}{3}\ln|t+\sqrt{t^2-1}|$, где $t=x^3$. 1092. $-\ln|\cos x|$. 1093. $\ln|x+3|$. 1094. $\frac{1}{a}\ln|ax+b|$. 1095. $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$. 1096. $-\frac{1}{9}\ln|1-3x^3|$. 1097. $\frac{1}{5}\ln|\sin 5x|$. 1098. $\ln|x^2+5x-6|$. 1099. $-\frac{1}{2}\ln|3-4\sin x|$. 1100 $\frac{2}{15}(3x+4)\sqrt{(x-2)^3}$. 1101. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a}$. 1102. $-\frac{1}{2}\ln(2\cos x+$ $+\sqrt{1+4\cos^2 x})$. 1103. $\frac{2}{15}(3x-7)\sqrt{(x+1)^3}$. 1104. $-\frac{1}{4}\ln|3-4x|$. 1105. $-\frac{1}{\ln x}$. 1106. $-\frac{1}{2\ln^2 x}$. 1107. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}$. 1108. $-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$. 1109. $\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+8\arcsin\frac{x}{4}$. 1110. $\frac{1}{3}(x^2-8)\sqrt{x^2+4}$. 1111. $\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}$. 1112. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. 1113. $t+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$, где $t=\sqrt{x^2+1}$. 1114. $\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})-2x$. 1115. $\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. 1116. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$. 1117. $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$. 1118. $-2[\sqrt{1-x}-\ln(\sqrt{1-x}+1)]$. 1119. $-2\left(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)$, где $t=$ $=\sqrt{1-\ln x}$. 1121. $\sin x-x\cos x$. 1122. $e^x(x-1)$. 1123. $\frac{1}{2}e^x(\sin x+$ $+\cos x)$. 1124. $x(\ln x-1)$. 1125. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$. 1126. $\frac{x^2}{4}(2\ln^2 x-$ $-2\ln x+1)$. 1127. $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)$. 1128. $-\frac{1}{x}(1+\ln x)$. 1129. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-$ $-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 1130. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$. 1131 $-0{,}5e^{-2x}(x^2+x+$ $+3{,}5)$. 1132. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$. 1133. $\frac{1}{9}(3x\sin 3x+\cos 3x)$. 1134. $x\operatorname{tg} x+$ $+\ln|\cos x|$. 1135. $\frac{x}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|$. 1136. $\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$. 1137. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$. 1138. $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})$. 1139. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$. Указание. $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$. 1140. Решение. Полагая $u=\sqrt{x^2+a}$, $dv=dx$, получаем $du=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx$,

$v=x$; $I=\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-$ $-\int\frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-I+\int\frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$, откуда $2I=x\sqrt{x^2+a}+$ $+a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+2C$, следовательно, $I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+$ $+\sqrt{x^2+a}|+C$. **1144.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right|$. **1145.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|$. **1146.** $\ln(x^2+$ $+2x+5)-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$. **1147.** $0{,}4\ln\left|\frac{x+1}{x-9}\right|-0{,}5\ln|x^2-8x-9|$. **1148.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+3)^7}{x}\right|$. **1149.** $x+\ln\sqrt[5]{|(x-1)^3|(x+4)^2}$. **1150.** $\ln\left|\frac{x}{(x-1)^2}\right|$. **1151.** $x^2-4x+\ln[(x+3)^{14}\sqrt{x^2+2x-3}]$. **1152.** $\frac{2}{\sqrt{22}}\ln\left|\frac{3x+4-\sqrt{22}}{3x+4+\sqrt{22}}\right|$. **1153.** $\ln(x^2-5x+7)+\frac{16}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{3}}$. **1154.** $\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}|$. **1155.** $\frac{1}{3}\ln|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-1}|$. **1156.** $\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x(x+3)}\right|$. **1157.** $9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}-2\sqrt{1-x-x^2}$. **1158.** $\sqrt{x^2-4x}+\ln|x-2+$ $+\sqrt{x^2-4x}|$. **1159.** $-\sqrt{2x-x^2}+2\arcsin(x-1)$. **1160.** $\frac{1}{4}\left(7\arcsin\frac{2x-1}{2}-\right.$ $\left.-\sqrt{3+4x-4x^2}\right)$. **1161.** $\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x+1}-\frac{3}{2}\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}|$. **1162.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}$. **1163.** $\frac{x+3}{2}\sqrt{x^2+6x}-$ $-\frac{9}{2}\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x}|$. **1164.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x-1)$. **1165.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}$. **1168.** $\frac{3x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x$. **1169.** $2\ln|x-5|$. **1170.** $-\ln|3-x|$. **1171.** $-\frac{1}{4(x+2)^4}$. **1172.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-$ $-4x+9)+\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}$. **1173.** $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$. **1174.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right|$. **1175.** $-\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$. **1176.** $\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$. **1177.** $\frac{1}{5}\left[9\operatorname{arctg}x+\right.$ $\left.+\ln\frac{x^2+1}{(x-2)^2}\right]$. **1178.** $x+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}[\ln(x-1)^8\sqrt{x^2+x+1}]$. **1179.** $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|$. **1180.** $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$. **1181.** $\ln\left|\frac{1}{x(x-2)\sqrt[3]{x-2}}\right|-\frac{1}{x^2}$. **1182.** $x+\frac{1}{3}\left[\ln|x-1|(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{acrtg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$. **1183.** $\frac{1}{32}\left[2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+\ln\left|\frac{(t^2+4)^{32}}{(t^2-4)^{31}(t-2)^2}\right|-16t^2\right]$. **1185.** $4x^{\frac{7}{4}}\left(\frac{x}{11}+\right.$

$+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{9}+\frac{1}{7}\Big)$. 1186. $\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\operatorname{arctg} t$, $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 1187. $\frac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{3}$. 1188. $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}\right|$. 1189. $\frac{4}{3}\left[t^3-\ln(t^3+1)\right]$, $t=\sqrt[4]{x}$. 1190. $t^3-\frac{3}{2}t^2+3t-\ln(t+1)^3$, $t=\sqrt[6]{2x+1}$. 1194. $\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 6x}{12}$. 1195. $-\frac{1}{16}(2\cos 4x+\cos 8x)$. 1196. $\frac{1}{8}(2\sin 2x-$ $-\sin 4x)$. 1197. $2\cos\frac{x}{4}-\frac{6}{5}\cos\frac{5x}{12}$. 1198. $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$. 1199. $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{7}\cos 7x+\cos x+\frac{1}{9}\cos 9x\right)$. 1200. $\frac{1}{3}\cos^3 x-$ $-\cos x$. 1201. $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$. 1202. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$. 1203. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|$. 1204. $\frac{1}{4}[2t^2-t^4-2\ln(t^2+1)]$, где $t=\operatorname{ctg} x$. 1205. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. 1206. $\ln|t|-\frac{1}{2t^2}$, где $t=\operatorname{tg} x$. 1207. $\arccos\left(\frac{\cos x}{2}\right)$. 1208. $-\frac{3}{4}\cos\frac{2x}{3}$. 1209. $\frac{x}{2}-\frac{7}{4}\sin\frac{2x}{7}$. 1210. $\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\sin 6x$. 1211. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$. 1212. $\frac{\sin^4 x}{12}(3-2\sin^2 x)$. 1213. $\ln|\operatorname{tg} x|$. 1214. $\frac{1}{32}(12x-8\sin 2x+\sin 4x)$. 1215. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|$. 1216. $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 1217. $-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$. 1218. $\frac{1}{50}(5x-9)^{10}$. 1219. $\frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2x-3)$. 1220. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{x}+$ $+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right|$. 1221. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-1)^2(x+1)^3}{(x+2)^5}\right|$. 1222. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2}{x^2+3}$. 1223. $-2\sqrt{1-x-x^2}$. 1224. $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}$. 1225. $\frac{5^x e^x}{\ln 5e}$. 1226. $-\frac{15}{4}\sqrt[5]{(8-x^2)^4}$. 1227. $-e^{-x}(x^2+3x+2)$. 1228. $\ln\frac{x-1}{x}-\frac{\ln(x-1)}{x}$. 1229. $\frac{1}{15}(3x^2-8)\sqrt{(x^2+4)^3}$. 1230. $-t+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$, $t=\operatorname{arcsec} x$. 1231. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-$ $-\frac{x^2}{2}$. 1232. $\frac{2}{21}(3\cos^2 x-7)\sqrt{\cos^3 x}$. 1233. $0{,}2\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x-5}{\operatorname{tg} x}\right|$. 1234. $\ln(1+$ $+\sin^2 x)$. 1235. $2\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+\sec x$. 1236. $-\frac{1}{4}(6x+4\operatorname{ctg} x+$ $+\sin 2x)$. 1237. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg} x|$. 1238. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$. 1239. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\operatorname{tg} x|$. 1240. $\frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos x}(\cos^2 x-7)$. 1241. $0{,}1\ln|3\cos x+$

$+\sin x|+0{,}3\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. **1243.** $\frac{7}{\ln 2}$. **1244.** 1. **1245.** $19\frac{1}{6}$. **1246.** 0. **1247.** $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1248.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **1249.** -1. **1250.** $\frac{\pi}{6}$. **1251.** $\frac{\pi}{4}$. **1252.** $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$. **1253.** $\frac{\pi}{4}$. **1254.** $\frac{1}{2}$. **1255.** $\frac{1}{2}(e^2-1)$. **1256.** $\ln 3$. **1257.** $\frac{\pi}{6}$. **1259.** $2-\frac{\pi}{2}$. **1260.** $\frac{16}{3}$. **1261.** $\frac{2}{3}$. **1262.** $\frac{\pi}{4}$. **1263.** $\frac{8}{3}$. **1264.** $\frac{19}{3}$. **1265.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **1266.** $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$. **1267.** 1. **1268.** $\ln 2$. **1270.** $\frac{1+2e^3}{9}$. **1271.** $\frac{\pi}{2}-1$. **1272.** $\frac{e^\pi+1}{2}$. **1273.** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. **1274.** $\frac{\pi}{4}$. **1275.** $\frac{5}{3}-2\ln 2$. **1276.** $\frac{1}{2}$. **1277.** $\frac{4}{9}(81\ln 3-26)$. **1270.** $\frac{\pi}{3}$. **1279.** $\frac{1}{4}\ln 2{,}5$. **1280.** -2π. **1281.** $\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$. **1282.** $1{,}5\,(0{,}5+\ln 1{,}5)$. **1283.** $4(\sqrt[3]{3}-1)$. **1288.** 1) πR^2; 2) 2; 3) $7\ln 2{,}5$; 4) 1; 5) $10\frac{2}{3}$; 6) $\frac{6}{5}\sqrt[3]{4}$; 7) $\frac{a^2}{e}(e^2-1)$; 8) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$; 9) $2(8\ln 2-3)$; 10) πab; 11) $\frac{3\pi-2}{3}$. **1289.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $32\frac{\sqrt{6}}{3}$; 3) $\frac{32}{3}$; 4) $\frac{32}{3}$; 5) $8\left(\frac{26}{3}-\ln 3\right)$; 6) $\frac{3}{2}$; 7) $\frac{4}{3}$. **1290.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **1291.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **1292.** $\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$; $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$. **1293.** $\frac{6\pi+4}{3}$; $\frac{2}{3}(9\pi-2)$. **1294.** π. **1299.** $12\frac{11}{27}$. **1300.** $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$. **1301.** $2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17})$. **1302.** $\frac{1}{4}[2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})]$. **1303.** $24\frac{22}{27}$. **1304.** $\ln\operatorname{tg}\frac{\pi+2a}{4}$. **1305.** $3\sqrt{37}+\frac{1}{2}\ln(6+\sqrt{37})$. **1306.** $2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17})$. **1310.** $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{5}$. **1311.** 8π. **1312.** 2π. **1313.** $\frac{128\pi}{7}$, $\frac{64\pi}{5}$. **1314.** 64π, $\frac{\pi 2^{11}}{35}$. **1315.** $\frac{\pi^2}{2}$. **1316.** $\frac{3}{8}\pi^2$. **1317.** $\frac{\pi a^3}{15}$. **1318.** $21{,}6\pi$. **1319.** $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **1320.** $\frac{32}{105}\pi a^3$. **1321.** $\frac{\pi a^3}{4}(e^2+4-e^{-2})$. **1322.** $2\pi^2a^2b$. **1326.** $\approx 31{,}73$ *м*. **1327.** $v_0t-\frac{gt^2}{2}$. **1328.** $\frac{\gamma ah^2}{3}$. **1329.** 40 000 *т*. **1330.** 180 *т*, 135 *т*. **1331.** 25π *кГм*. **1332.** 28 800 *кГм*. **1333.** 48 000 *кГм*. **1336.** 1. **1337.** Расходится. **1338.** 2. **1339.** $\frac{1}{2}$. **1340.** Расходится. **1341.** -1. **1342.** Расходится. **1343.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **1344.** $\frac{1}{\ln 3}$. **1345.** 1) Расходится; 2) $\frac{3(1-\sqrt[3]{4})}{2}$. **1346.** π. **1347.** 100 *м*. **1350.** 30; 19; 11; 36,7%; 43; 13; 43,3%; 31; 1; 3,3%. **1351.** $5\frac{1}{3}$; 4,765; 0,568; 10,7%; 5,765; 0,432; 8,1%;

5,265; 0,068; 1,3%. **1352.** 7,395. **1353.** $0{,}302\pi \approx 0{,}949$. **1354.** 3,240; 3,040; 3,140. **1355.** $n_1 \geqslant 1000$, $n_2 \geqslant 13$. **1365.** 1) $y = \sin x + C$; 2) $y = \frac{1}{4}(2x - \sin 2x) + C$; 3) $y = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$; 4) $y = \frac{3}{2}x^4 + C$; 5) $y = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$; 6) $y = x(\ln x - 1) + C$; 7) $x = y - \operatorname{arctg} y + C$; 8) $y = \sin(x + C)$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x + C \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \pm 1$; 9) $y = (x+C)^2$, $y=0$. **1366.** 1) $y = \operatorname{tg} x - x + C$; 2) $3^x + 3^{-y} = C$. **1367.** 1) $\arcsin x + \arcsin y = C$; 2) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$, $y = \pm 1$. **1368.** 1) $y = C\sin x - 1$, $y = -1$; 2) $x = \frac{y^2}{2} + \ln|Cy|$, $y = 0$. **1369.** 1) $s = \frac{1}{t} + \ln|Ct|$; 2) $\frac{1}{\rho} = \ln|C\cos\varphi|$, $\rho = 0$. **1370.** 1) $y = e^{C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, $y = 0$; 2) $\ln\left|y - 3 + \sqrt{6y - y^2}\right| = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$, $y = 0$, $y = 6$. **1371.** 1) $xy = -6$, $xy = 8$, $xy = 6$; 2) $y = -x$; 3) $y = \frac{1}{27}(x + C)^3$, $y = \frac{1}{27}(x + 3)$, $y = 0$ (ось Ox); 4) $y = Ce^{-x^2}$, $y = 3e^{-x^2}$, $y = 0$. **1372.** 1) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 1 + \sqrt{5}$; 2) $\frac{y^2}{2} = 1 + e^x + \ln\frac{2}{1+e^x}$; 3) $(1 + y^2)(1 + x^2) = 10x^2$. **1374.** 1) $x = Ce^{\frac{x}{y}}$, $y = 0$; 2) $\sin\frac{y}{x} = Cx$, $y = 0$; 3) $y^2 = \frac{x^3 + C}{3x}$. **1375.** 1) $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$; 2) $y = Cx + x\ln|y|$, $y = x\ln|y| - (5 + \ln 5)x$, $y = 0$; 3) $y^2 = 2x^2\ln|x| + Cx^2$, $y^2 = 2x^2\ln|x| + x^2$, $y^2 = 2x^2\ln|x|$. **1377.** 1) $y = \frac{1}{x^2}(x\ln x - x + C)$; 2) $y = e^{-x}(x + C)$; 3) $y = (x + C)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **1378.** 1) $y = \frac{x^3}{5} + \frac{6}{5x^2}$, $y = \frac{x^3}{5} - \frac{11}{5x^2}$; 2) $y = 3x^2$, $y = x(3x - 8)$; 3) $y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y = 1$. **1381.** $x^2 + y^2 = C$. **1382.** $y^2 = 8x$. **1383.** $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. **1384.** $x = y^3 - 8$. **1385.** $s = \frac{5}{3}t^3 + 2t$; 51 *м*. **1386.** $s = 8e^{3t}$; $v = 24e^{3t}$. **1387.** ≈ 47 *мин*. **1396.** 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{3^2}{4!} + \frac{4^2}{5!} + \ldots$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \ldots$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} - \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} - \ldots$ **1397.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} +$

$+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$ **1398.** 1) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; 2) $a_n=\frac{1}{2n-1}$; 3) $a_n=\frac{1}{2n}$; 4) $a_n=(-1)^{n-1}$; 5) $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$. **1399.** $S_n=n$, ряд расходится. **1400.** $S_n=\frac{1+n}{2}n$, ряд расходится. **1401.** $S_n=\frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}}$, $S=\frac{5}{4}$. **1402.** $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, $S=\frac{1}{2}$. **1403.** $S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$, $S=1$. **1404.** Сходится. **1405.** Сходится. **1406.** Расходится. **1407.** Сходится. **1408.** Расходится. **1409.** Сходится. **1410.** Расходится. **1411.** Сходится. **1412.** Сходится. **1413.** Сходится. **1414.** Сходится. **1415.** Сходится. **1416.** Сходится. **1417.** Расходится. **1418.** Расходится. **1419.** Сходится. **1420.** Сходится. **1421.** Сходится. **1422.** Расходится. **1423.** Сходится. **1424.** Сходится. **1425.** Сходится. **1426.** Сходится. **1431.** Сходится условно. **1432.** Сходится абсолютно. **1433.** Сходится абсолютно; $S=\frac{2}{3}$. **1434.** Сходится абсолютно. **1435.** Сходится условно. **1436.** Расходится. **1437.** Сходится условно. **1438.** Сходится абсолютно. **1439.** $|r_4|<0{,}01$, $|r_5|<\frac{1}{144}$, $r_4>0$, $r_5<0$. **1440.** $|r_3|<\frac{1}{120}$, $|r_6|<\frac{1}{504}$, $r_3<0$, $r_6>0$. **1441.** 4; 6. **1442.** 200. **1444.** $-1<x\leqslant 1$. **1445.** $-1<x\leqslant 1$. **1446.** $(-\infty, +\infty)$. **1447.** $-0{,}1<x<0{,}1$. **1448.** $-3\leqslant x<7$. **1449.** $-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}$. **1450.** $2<x<4$. **1451.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Указание. Здесь следует применить признак Даламбера, так как данный ряд не содержит всех степеней x (коэффициенты $a_{2n-1}=0$ при $n=1, 2, 3, \ldots$). **1452.** $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. **1455.** 1) $x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$; 2) $1+x\ln 2+\frac{x^2}{2!}(\ln 2)^2+\ldots+\frac{x^n}{n!}(\ln 2)^n+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$; 3) $1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$; 4) $1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$; 5) $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\frac{2^7x^8}{8!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$; 6) $2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^5x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **1456.** $e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$ $(-\infty<x<\infty)$. **1457.** $1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!\ 2^n}(x-1)^n$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

1458. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}+\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\right]\right\}$ $(-\infty<x<\infty)$. **1459.** $4+10(x-2)+6(x-2)^2+(x-2)^3$. **1460.** $-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3$. **1461.** $-\frac{1}{3}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^n}\right]$ $(-6<x<0)$. **1462.** 1) $1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots$; 2) $1+x-\frac{x^3}{3}+\ldots$; 3) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$ **1463.** 1) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$; 2) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\,n!}x^n$; 3) $1+\frac{x}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot2\cdot5\cdot8\cdots(3n-4)}{3^n\,n!}x^n$; 4) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{2^2\cdot2!}-\frac{3\cdot5x^6}{2^3\cdot3!}+\ldots$ **1471.** $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$ **1472.** $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots$ **1473.** $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$ **1474.** $x-\frac{2^2}{2!}x^3+\frac{2^4}{4!}x^5-\frac{2^6}{6!}x^7+\ldots$ **1475.** 3, 14. **1476.** 1) 0.3679; 2) 1,6487; 3) 0,9848; 4) 0,9511; 5) 0,3090; 6) 0,2955; 7) 0,8414; 8) 0,9211. **1477.** 1) 1,002; 2) 1,045; 3) 20,100; 4) 0,099; 5) 4,121. **1478.** 1) 0,996; 2) 1,975; 3) 1,917. **1479.** 1) 0,0198; 2) 0,0583. **1480.** 1) 0,9461; 2) 0,1987; 3) 0,0901; 4) 0,2505. **1485.** 1) $A=B$; 2) $AB=V$; 3) $=U$; 4) $A=V$. **1486.** 1, 2 и 4 не правильны; 3 правильно. **1487.** 1) A; 2) $AB+BC+CA$; 3) $A+B+C$; 4) B. **1488.** 1) $A\bar{B}\bar{C}$; 2) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$; 3) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$; 4) ABC; 5) $A+B+C$; 6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. **1490.** 0,5069. **1491.** 0,89. **1492.** 0,517. **1493.** 0,13775. **1497.** 0,417. **1498.** 1) 0,5; 2) 0,8. **1499.** 0,5. **1500.** 0,0556. **1501.** 0,2222. **1502.** 0,5714. Указание. Среди первых 28 дней января всегда четыре воскресенья. Следовательно, в январе не будет больше воскресений, если их не будет 29, 30 и 31 числа. Последнее возможно в том случае, когда на число 29 выпадает понедельник, вторник, среда или четверг; $p=\frac{4}{7}$. **1503.** 0,0014. **1504.** $\frac{C_5^2C_{20}^1}{C_{25}^3}=0{,}087$. **1505.** 1) $\frac{C_{31}^3}{C_{37}^3}=0{,}579$; 2) $\frac{C_{31}^3+6C_{31}^2+C_6^2C_{31}^1}{C_{37}^3}=0{,}9973$. **1506.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) 0,00033. **1507.** 0,00243. **1508.** 0,0269. **1509.** $\frac{2}{C_{36}^{18}}$. **1510.** 0,00077. **1511.** $\frac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$. **1512.** 0,0667. **1513.** $(n+1)\,6^{-n}$. **1514.** $\frac{6^4-5^4}{6^4}>\frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}}$. **1515.** $\frac{C_{16}^{12}\cdot C_4^2}{C_{36}^{18}}$. **1516.** $\frac{n-2}{n}$. **1517.** $\frac{1}{C_n^r}=\frac{r!\,(n-r)!}{n!}$. **1518.** $\frac{2(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}$. **1519.** $\frac{2(m-1)}{m(nm-1)}$. **1520.** 0,2. **1521.** $[60^2-(60-\alpha)^2]\,60^{-2}$. **1522.** $2^{-k-m}\times$

$\times 3^{-n+k+m}$. **1524.** 0,3 **1525.** 0,7. **1526.** 0,75. **1527.** 0,107. **1528.** 0,3053. **1529.** 0,9187. **1530.** 0,91. **1531.** $\dfrac{C_{15}^2+C_8^2+C_7^2}{C_{30}^2}=0{,}331$. **1532.** 0,0273. **1534.** 0,667. **1535.** $\dfrac{11}{36}$. **1539.** Пусть $P(A/B)>P(A)$, тогда $P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)P(A/B)}{P(A)}>\dfrac{P(B)P(A)}{P(A)}=P(B)$. **1540.** 1) $1-\dfrac{966}{1000}\times$ $\times\dfrac{965}{999}=0{,}064$. Указание. Рассмотреть противоположное событие. 2) 0,00024. **1541.** 0,046. **1542.** 0,053. **1543.** $\dfrac{5}{28}$. **1544.** 0,727. **1545.** 0,92. **1546.** Не менее 16 раз. Указание. Вероятность того, что при подбрасывании двух монет выпадет два герба, равна $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$. Поэтому вероятность невыпадения ни разу двух гербов при n подбрасываниях двух монет равна $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, а вероятность появления двух гербов, хотя бы один раз, равна $1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. По условию n должно быть таким, чтобы $1-(0{,}75)^n\geqslant 0{,}99$. Отсюда $0{,}01\geqslant(0{,}75)^n$; $\lg 0{,}01\geqslant n\lg 0{,}75$; $n(-0{,}1249)\leqslant -2$, $n>\dfrac{2}{0{,}1249}=$ $=16{,}01$. **1547.** Первому — 75%, второму — 25%. Указание. Ставку надо разделить пропорционально вероятностям выигрыша каждым из игроков, если бы игра продолжалась. **1549.** $1-(0{,}9999)^{100}$. **1550.** 0,3; 0,6. **1551.** $\dfrac{n-m}{n+m}$. **1552.** 1) 0,7536; 2) 0,9993. **1553.** 0,9865. **1554.** 1) 61, 20; 2) 0,003. **1555.** 0,5717. **1556.** $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$. **1558.** 0,0031. **1559.** 0,024. **1560.** 0,594. Указание. Самолет может быть сбит (B), если произошло одно попадание (A_1), два попадания (A_2) и, наконец, три попадания (A_3). Пользуясь теоремами сложения и умножения, находим. $P(A_1)=0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2+$ $+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}26$; $P(A_2)=0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}6\times$ $\times 0{,}8=0{,}46$; $P(A_3)=0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}24$; $P(B/A_1)=0{,}3$; $P(B/A_2)=0{,}6$; $P(B/A_3)=1$; $P(B)=0{,}26\cdot 0{,}3+0{,}46\cdot 0{,}6+0{,}24\cdot 1=0{,}594$. **1561.** 0,34. **1562.** 1) $\dfrac{173}{495}$; 2) 0,094. **1563.** 0,87. **1564.** $\dfrac{1^n+2^n+\ldots+N^n}{N^n(N+1)}$. **1566.** 0,322. **1567.** 0,156. **1568.** $\dfrac{6}{7}$. **1569.** 0,254. **1570.** $\dfrac{6}{13}$. **1574.** $2{,}537\cdot 10^{-4}$. **1575.** 0,06. **1576.** 0,0038. **1577.** $P_{12,\,14}+P_{13,\,14}+P_{14,\,14}=0{,}105$. **1578.** 0,217. **1579.** 1) 0,254; 2) 0,133; 3) 0,167; 4) 0,0055; 5) 0,000022. **1580.** 0,552. **1581.** 0,559. **1582.** 8 мест. **1583.** $n\geqslant 7$. Указание. Вероятность того, что ни один из снарядов не попадет в цель, равна $(1-0{,}3)^n=0{,}7^n$. Искомое n находим из неравенства $1-(0{,}7)^n\geqslant 0{,}9$. **1589.** 6. **1590.** 5. **1591.** 1) 5; 2) 73; 3) 174; 4) 15; 5) 57. **1592.** 79; 80. **1593.** $455\leqslant n\leqslant 459$. **1594.** $1259\leqslant n\leqslant 1279$. **1595.** $p=\dfrac{1}{1111}$; $62\,369\leqslant n\leqslant 72\,764$. **1596.** $\dfrac{18}{29}$. **1597.** $\dfrac{82}{91}\leqslant p\leqslant\dfrac{83}{91}$. **1599.** 0,036. **1600.** 1) 0; 2) 0,081, 3) 0,129; 4) 0,105; 5) 0,01. **1601.** 0,972. **1602.** 0,0085. **1603.** 0,009. **1604.** 0,147. **1605.** 0,007. **1607.** 0,025. **1608.** 360 ± 3. **1609.** 0,08. **1610.** 81. **1611.** 55.

1616. 0. **1617.** 0,993. **1618.** 0,929. **1619.** 1. **1620.** 0,960. **1621.** 0,719. **1622.** 0,9999. **1623.** 0,159. **1624.** 0,483. **1625.** 925. **1626.** 583. **1627.** Нет. **1628.** 0,274. **1629.** 0,131. **1630.** 0,056. **1631.** 0,013. **1632.** 0,0019; 0,0181. **1633.** 0,049 **1634.** 19 357. **1635.** 1) 499; 2) 2224. **1636.** 614 656. **1637.** 31 618. **1638.** 576. **1639.** 0,00217. **1640.** 3,5 руб. **1641.** 2750 руб. Указание. Сначала находим a из уравнения $P(a \leqslant m \leqslant 15\,000) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{15\,000-90}{9{,}458}\right) - \Phi\left(\frac{a-90}{9{,}458}\right)\right] = 0{,}0228$. **1642.** 0,90508. **1646.** 1) 0,1; 1,29; 2) 4,7; 3,01; 3) 8; 8; 4) 152,5; 3118,75. **1647.** 1) $EX = 2\,5$, $DX = 0{,}45$, $EX = -1{,}5$, $DX = 0{,}45$; 2) $EX = 1$, $DX = 0{,}5$, $EY = 1$, $DY = 1$; 3) $EX = 4{,}7$, $DX = 1{,}21$, $EY = -1{,}4$, $DY = 1{,}44$; 4) $EX = 0$, $DX = 0{,}6$, $EY = 0{,}6$, $DY = 3{,}24$. **1649.** 2,734; 1,57. **1650.** 3,15; 0,65. **1651.** 0,3; 0,285. **1652.** 3,5; 1,75. **1653.** 10; 1,67. **1654.** 1) 8; 56; 2) 4,5; 5,25. **1655.** 10. **1656.** $\frac{s}{p}$. **1657.** 10.

1658. Первая случайная величина (X) принимает значение m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) с вероятностью $\frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!}$, а вторая ($Y$) — значение n ($n = 0,1,2, \ldots$) с вероятностью $\frac{\lambda_2^n e^{-\lambda_2}}{n!}$. Так как X и Y — независимые случайные величины, то

$$P(X+Y=s) = \sum_{m+n=s} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} \cdot \frac{\lambda_2^n e^{-\lambda_2}}{n!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{m+n=s} \frac{1}{m!n!} \lambda_1^m \cdot \lambda_2^n =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{n=0}^{s} \frac{\lambda_1^{s-n} \lambda_2^n}{(s-n)!\, n!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{s!} \sum_{n=0}^{s} C_s^n \lambda_1^{s-n} \cdot \lambda_2^n = \frac{1}{s!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} [\lambda_1+\lambda_2]^s.$$

1659. 3,439; 1,020. **1660.** 0,938; 1,43. **1661.** $n(1-2p)$, $4np(1-p)$. **1662.** $1-q^n$, $N\left(1-q^n+\frac{1}{n}\right)$, где $q = 1-p$. Указание. $q = 1-p$ — вероятность того, что анализ крови у отдельного человека отрицателен, q^n — вероятность того, что анализ смеси крови данной группы людей отрицателен, $1-q^n$ — вероятность того, что анализ смеси положителен. Случайная величина X — число проведенных анализов имеет следующую таблицу распределения:

Значения случайной величины X	$k = \frac{N}{n}$	$k+n$	$k+2n$	$\ldots$
Вероятности, с которыми эти значения принимаются	$(q^n)^k$	$C_k^1 (q^n)^{k-1}(1-q^n)$	$C_k^2 (q^n)^{k-2}(1-q^n)^2$	$\ldots$

$\ldots$	$k+in$	$\ldots$	$k+kn$
$\ldots$	$C_k^i (q^n)^{k-i}(1-q^n)^i$	$\ldots$	$C_k^k (1-q^n)^k$

Поэтому $EX = \sum_{i=0}^{k} (k+in) C_k^i (q^n)^{k-i} (1-q^n)^i = k \sum_{i=0}^{k} C_k^i (q^n)^{k-i} (1-q^n)^i + n \sum_{i=0}^{k} i C_k^i (q^n)^{k-i} (1-q^n)^N = k[q^n + (1-q^n)]^k + n(1-q^n) = k + kn - nkq^n = N\left(1 - q^n + \frac{1}{n}\right)$. **1667.** $\varphi(-x)$. **1668.** $p(x) = (b-a)^{-1}$, $EX = \frac{a+b}{2}$, $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$. **1669.** $\varphi(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $\varphi(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ при $x > 0$. **1670.** $A = 0{,}5$, $EX = \frac{\pi}{2}$, $DX = \frac{\pi^2}{4} - 2$. **1671.** При $x \leqslant 0$ равна нулю, а при $x > 0$ определяется по формуле $\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. **1672.** $\left[y^2\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{y^2}}\right]^{-1}$. **1673.** $EX = -1$, $DX = 2$. **1674.** 1) $k^{-1}\varphi(k^{-1}x)$; 2) $\varphi(x-a)$; 3) $k^{-1}\varphi\left(\frac{x-a}{k}\right)$; 4) равна нулю при $x \leqslant 0$ и равна $\frac{\varphi(\sqrt{x}) + \varphi(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ при $x > 0$; 5) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\varphi(\sqrt[3]{x})$; 6) $e^x \varphi(e^x)$. **1675.** $C_n\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$, $\frac{1}{\pi}$. **1676.** 1) $C = \frac{2}{\pi}$, $EX = 0$, $DX = 0{,}25$; 2) $C = \frac{1}{\pi}$, $EX = 0$, $DX = 0{,}5$; 3) $C = 0{,}5$, $EX = 0$, $DX = \frac{1}{3}$. **1680.** $P(-5 < X < 0) = 0{,}307$. **1681.** 0,685. **1682.** $0{,}5\left[1 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\right]$. **1683.** $EX = n$; $DX = 2n$. **1686.** 0,95; $P \geqslant 0{,}435$. **1687.** $P \geqslant 0{,}4$; 1. **1688.** $P \geqslant 0{,}583$. **1689.** 1) $P \geqslant 0{,}775$; 2) $P \geqslant 0{,}9$. **1690.** $\Phi(n)$, $P \geqslant 1 - \frac{2}{n\sqrt{2\pi}}$. **1691.** $P \geqslant 0{,}3937$. **1695.** $P \geqslant \frac{8}{9}$. **1696.** $[\varepsilon^2 - nr(1-r) - ms(1-s)]\,\varepsilon^{-2} \leqslant P$. **1697.** $1 - e^{-2n}$, $P \geqslant 1 - \frac{1}{2n^2}$. **1698.** 0,95, $P \geqslant 0{,}872$. **1699.** $P \geqslant 0{,}883$. **1700.** $P \geqslant \frac{7}{8}$. **1704.** $P \geqslant \frac{7}{8}$. **1705.** $P \geqslant 0{,}9$. **1706.** $n \geqslant 6400$. **1707.** $5 \cdot 10^5$. **1708.** 0,548. **1709.** 0,16. **1710.** 1) Да; 2) да. **1712.** 1) Да; 2) нет. **1715.** $P \geqslant 0{,}843$. **1716.** $P \geqslant 0{,}931$. **1717.** 62 500. **1718.** 0,537 — 0,553. **1720.** $P \geqslant 0{,}936$. **1721.** $P \geqslant 0{,}936$. **1722.** $n > 265$. **1723.** 83 300 000. **1724.** 0,85 — 1. **1725.** $\varepsilon \leqslant 0{,}056$. **1735.** $M_0X = 21$, $M_eX = 21$. **1736.** $M_0X = 165{,}2$, $M_eX = 165{,}3$. **1740.** 48 *км/ч*. **1747.** $\sigma^2 = 34{,}775$, $v = 3{,}56\%$, $R = 45$. **1748.** Процент жира в молоке есть величина более устойчивая. **1749.** $\sigma^2 = 192\,000$, $v = 27{,}96\%$, $R = 2200$. **1750.** Пусть распределение признака X в j-й группе имеет вид:

Значения признака	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
Соответствующие частоты	m_{1j}	m_{2j}	...	m_{ij}	...	m_{kj}

Тогда $DX=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}(x_i-\overline{X})^2}{\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}}=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}(x_i-\overline{X}_j+\overline{X}_j-\overline{X})^2}{\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}}=$

$=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}(x_i-\overline{X}_j)^2}{\sum\limits_{j=1}^{p}n_j}+2\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}(x_i-\overline{X}_j)(\overline{X}_j-\overline{X})}{\sum\limits_{j=1}^{p}n_j}+$

$+\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}(\overline{X}_j-\overline{X})^2}{\sum\limits_{j=1}^{p}n_j}=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}n_j\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}(x_i-\overline{X}_j)^2}{n_j}}{\sum\limits_{j=1}^{p}n_j}+2\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}(\overline{X}_j-\overline{X})\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}(x_i-\overline{X}_j)}{\sum\limits_{j=1}^{p}n_j}+$

$+\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}n_j(\overline{X}_j-\overline{X})^2}{\sum\limits_{j=1}^{p}n_j}=\overline{\sigma}_j^2+D(\overline{X}_j)$, ибо $\sum\limits_{i=1}^{k}m_{ij}(x_i-\overline{x}_j)=0$. **1757.** $a=0{,}303$, $\varepsilon=-0{,}478$. **1758.** $a=-0{,}972$, $\varepsilon=0{,}763$. **1761.** $a=0$, $\varepsilon=-1{,}2$. **1763.** Пусть Δ_i — ошибка, которая допущена при округлении i-го числа. Тогда $E\Delta_i=0$, $D\Delta_i=12^{-1}\cdot10^{-2m}$, $E\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i=0$, $D\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i=12^{-1}\cdot n\times$

$\times10^{-2m}$, $P\left(\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i\right|<\varepsilon\right)=0{,}997\approx\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{D\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i}}\right)$, $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{D\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i}}=$

$=3$, $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-m}\sqrt{3n}$. **1769.** 0,941. **1770.** 0,99422. **1771.** 1. **1772.** 0,803. **1773.** 0,9668. **1777.** $4{,}95\pm0{,}38$. **1779.** $\varepsilon=0{,}7\%$. **1780.** 19,68; 0,884. **1781.** 576. **1782.** 94. **1783.** 160 000. **1784.** $P(|w_1-w_2|<\varepsilon)\approx$

$\approx\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{w_1(1-w_1)}{n_1}+\dfrac{w_2(1-w_2)}{n_2}}}\right)$, где $w_i=\dfrac{k_i}{n_i}$. **1785.** Расхождение существенно. **1789.** 0,357. **1790.** 19,5—20,5. **1791.** 0,668. **1793.** Согласуется. **1794.** Согласуется. **1795.** Не согласуется. **1797.** Согласуется. **1798.** Согласуется. **1802.** $a=0{,}263$, $b=0{,}120$. **1803.** $X=8{,}484\ (T-1956)+83{,}85$, $y=-0{,}283\,(T-1956)+31{,}38$. **1804.** $a=11{,}881$, $b=-23\,075{,}867$. **1805.** $y=6{,}467+0{,}176\,x$. **1806.** $y=27{,}315\,(x-1956)+233{,}172$. **1807.** $y=43{,}1\cdot1{,}167^{(x-1932)}$. Указание. Прологарифмировав правую и левую части

уравнения $y = ab^{(x-1932)}$, мы получим $\lg y = \lg a + \lg b \cdot (x - 1932)$, где $\lg a$ и $\lg b$ могут быть найдены с помощью нормальной системы метода наименьших квадратов при выравнивании по прямой. **1808.** $a = 1$; $b = 1$; $c = -3$. **1809.** $y = 0{,}168\,x^2 + 1{,}02\,x + 18{,}7$. **1810.** $t = 2{,}001 \cdot n^{2{,}5993}$. **1812.** $r = 0{,}834$. **1813.** $r = 0{,}97$; $y = 10{,}9\,x + 11{,}4$. **1814.** $r = 0{,}98$; $x = 0{,}55y - 0{,}33$. **1815.** $r = 0$; $x = 4$; $y = 5$. **1816.** 1) 0,9000, $y - 3{,}9 = 0{,}17\,(x - 48{,}2)$, $x - 48{,}2 = 4{,}8\,(y - 3{,}9)$; 2) 0,015; $y - 30{,}4 = 0{,}0089\,(x - 238{,}5)$, $x - 238{,}5 = 0{,}034\,(y - 30{,}4)$; 3) 0,716; $y - 0{,}142 = 0{,}0012\,(x - 798{,}75)$, $x - 798{,}75 = 441\,(y - 0{,}142)$; 4) $-0{,}899$; $y - 185{,}3 = -1{,}78\,(x - 46{,}72)$, $x - 46{,}72 = -0{,}454\,(y - 185{,}3)$. **1818.** $\eta_{y/x} = 0{,}9$; $\eta_{x/y} = 0$. **1819.** $\eta = 0{,}655$. **1821.** $R_{Z,\,XY} = 90$; $r_Y\,(X,\,Z) = 0{,}78$; $r_X\,(Y,\,Z) = 0{,}83$. **1822.** $R = 0{,}89$, $r_X\,(Z,\,Y) = 0{,}52$, $r_Y\,(Z,\,X) = 0{,}8$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Значения* функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1845	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

* Все значения умножены на 10 000.

2. Значения* функции $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	00000	00798	01596	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10348	11134	11924	12712	13499	14285	15069
0,2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0,3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0,4	31084	31819	32552	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0,5	38292	38995	39694	40387	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0,6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0,7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0,9	63188	63718	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
1,0	68269	68750	69227	69699	70166	70628	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76595
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	85547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86378
1,5	86639	86696	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89899	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92655
1,8	92814	92970	93124	93275	93423	93569	93711	93852	93989	94124
1,9	94257	94387	94514	94639	94762	94882	95000	95116	95230	95341
2,0	95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2,1	96427	96514	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	87798
2,3	97855	97911	97966	98019	98072	98123	98172	98221	98269	98315
2,4	98360	98405	98448	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99263	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99404	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99692	99702	99712	99721
3,0	99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99982	99983	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	99990	99990
3,9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993

* Все значения умножены на 100 000.

3. Таблица значений функций $\Theta_n(\alpha)$

α \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	>20
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000									
0,1	063	071	073	075	076	077	077	077	077	078	078	078	078	079	079	080
0,2	126	140	146	149	151	152	153	154	154	155	155	156	156	156	156	158
0,3	186	208	216	221	224	226	227	228	229	230	231	231	232	232	233	236
0,4	242	272	285	290	294	297	299	300	302	302	304	305	306	306	307	311
0,5	295	333	349	357	362	365	368	369	371	372	374	375	376	377	377	383
0,6	344	391	409	419	425	430	433	435	437	438	440	442	443	444	445	451
0,7	389	444	466	477	485	490	493	496	498	500	505	506	506	507	508	516
0,8	430	492	517	531	540	546	550	553	556	558	561	563	565	566	567	576
0,9	467	537	566	581	591	597	602	606	608	611	616	617	619	620	621	632
1,0	0,500	577	609	626	637	644	649	653	657	659	663	666	668	669	671	683
1,1	530	614	648	667	679	687	692	697	700	703	707	710	712	714	716	729
1,2	558	647	684	704	716	725	731	736	739	742	747	750	752	754	756	770
1,3	583	677	716	737	750	759	765	770	774	777	782	785	788	790	792	806
1,4	605	704	744	766	780	789	796	801	805	808	813	817	819	821	823	838
1,5	626	728	769	792	806	816	823	828	832	835	841	844	847	849	851	866
1,6	644	749	792	815	830	839	846	852	856	859	864	868	871	873	875	890
1,7	661	769	812	836	850	860	867	872	877	880	885	889	892	894	895	911
1,8	677	786	830	854	868	878	885	890	895	898	903	907	909	911	913	928
1,9	692	802	846	870	884	894	901	906	910	913	918	922	924	925	928	943
2,0	0,705	816	861	884	898	908	914	919	923	927	931	935	937	939	941	954
2,2	728	841	885	907	921	930	936	941	945	948	952	955	957	959	960	972
2,4	749	862	904	925	938	947	953	957	960	963	966	969	971	973	974	984
2,6	766	878	920	940	952	959	965	968	971	974	977	979	981	982	983	991
2,8	782	893	932	951	962	969	973	977	979	981	984	986	987	988	989	995
3,0	795	905	942	960	970	976	980	983	985	987	989	990	992	992	993	997
3,2	807	915	952	967	976	981	985	987	989	991	992	994	994	995	996	999
3,4	818	923	958	973	981	986	989	991	992	993	995	996	996	997	997	999
3,6	828	931	963	974	984	989	991	993	994	995	996	997	998	998	998	1,000
3,8	836	937	968	981	987	991	993	995	996	997	997	998	999	999	999	
4,0	844	943	972	984	990	993	995	996	997	998	998	999	999	999	999	
4,5	861	954	980	989	994	996	997	998	999	999	999	1,000				
5,0	874	962	985	903	996	998	998	999	999	999	6,000					
5,5	886	969	989	904	997	998	999	999	1,000							
6,0	895	973	991	906	998	999	999	1,000								

4. Корни уравнения $P(\chi_0^2 \geqslant \chi^2) = \alpha$ (r — число степеней свободы)

r \ P	0,05	0,01	r \ P	0,05	0,01	r \ P	0,05	0,01
1	3,841	6,635	11	19,675	24,725	21	32,671	38,932
2	5,991	9,210	12	21,026	26,217	22	33,924	40,289
3	7,815	11,345	13	22,362	27,688	23	35,172	41,638
4	9,488	13,277	14	23,685	29,141	24	36,415	42,980
5	11,070	15,086	15	24,996	30,578	25	37,652	44,314
6	12,592	16,812	16	26,296	32,000	26	38,885	45,642
7	14,067	18,475	17	27,587	33,409	27	40,113	46,963
8	15,507	20,090	18	28,869	34,805	28	41,337	48,278
9	16,919	21,666	19	30,144	36,191	29	42,557	49,588
10	18,307	23,209	20	31,410	37,566	30	43,773	50,892

ЛИТЕРАТУРА

Бараненков Г. С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под ред. Б. П. Демидовича. М., 1959.

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1956.

Боев Г. П. Теория вероятностей. М. — Л., 1950.

Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М., 1960.

Выгодский М. Я. Аналитическая геометрия. М., 1963.

Гнеденко Б. П. Курс теории вероятностей. М., 1961.

Зотина Р. С., Киреева А. Я., Фабрикант Л. Д. Сборник задач по математической статистике и теории вероятностей. М., 1962.

Крамер К. Математические методы статистики. М., 1948.

Лихолетов И. И. Методические указания по курсу математического анализа. М., 1960.

Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М., 1961.

Павловский З. Введение в математическую статистику. М., 1967.

Привалов И. И. Аналитическая геометрия. М., 1961.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1964.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1—3. М., 1947—1949.

Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., 1961.

Лихолетов Иван Иванович,
Мацкевич Иван Павлович

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Редактор *Н. Веревкина*
Худож. редактор *Г. Малышев*
Техн. редактор *М. Кислякова*
Корректор *Л. Рутковская*

Сдано в набор 13/V 1968 г. Подписано к печати 6/IV 1976 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Тип. № 3. Печ. л. 28,5. Уч.-изд. л. 28,56. Изд. № 67-114. Тип. зак. 3158. Тираж 50 000 экз. Цена 1 руб. 13 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы по математике, физике и энергетике. 220600. Минск, ул. Кирова, 24.

Отпечатано с матриц Ордена Трудового Красного Знамени типографии Издательства ЦК КП Белоруссии полиграфическим комбинатом им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Минск, ул. Красная, 23.

Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.

Л 65 Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Изд. 3-е, стереотип. Минск, «Вышэйш. школа», 1976.

456 с. с ил.

Учебное пособие для студентов экономических факультетов всех видов обучения, в особенности заочных и вечерних отделений.

В соответствии с программой по высшей математике пособие содержит следующие разделы: элементы аналитической геометрии и векторной алгебры, введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление, теория рядов, математическая статистика и теория вероятностей. В начале каждого параграфа приведены краткие теоретические сведения и примерные решения задач, с тем чтобы последующие задачи студенты могли решить самостоятельно. На вычислительные задачи даны ответы.

Л $\frac{20203—084}{M\ 304(05)—76}$ доп. 76 517

УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА ИЗДАТЕЛЬСТВА «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА» ПО ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

ВЫХОДИТ В 1976 ГОДУ

Лихолетов И. И. **Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика.** 42 л. 1 р. 63 к.

Тупиков В. А. **Ошибки в решении задач по высшей математике.** 8 л. 43 к.

Ангилейко И. М., Козлова Р. В. **Задачи по теории функции комплексной переменной.** 8 л. 32 коп.

Ершова В. В. **Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление.** 18 л. 76 коп.

Матвеев Н. М. **Дифференциальные уравнения.** Изд. 4-е, перераб. 25 л. 83 коп.

Сборник задач по физике. Под ред. М. С. Цедрика. Изд. 2-е, перераб. 22 л. 90 коп.

Тышкевич Р. И., Феденко А. С. **Линейная алгебра и аналитическая геометрия.** Изд. 2-е, перераб. 35 л. 1 р. 36 к.

Заказы на эти книги направляйте по адресам:

220005, Минск, Ленинский пр., 48, книжный магазин № 13, «Научно-техническая книга»;

220660, Минск, пл. Свободы, 19, книжный магазин № 31, «Книга — почтой».

УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА ИЗДАТЕЛЬСТВА «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА» ПО ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

ВЫЙДУТ В 1977 ГОДУ

Карпов В. Г., Мощенский В. А. **Математическая логика и дискретная математика.** 15 л. 66 коп.

Богданов Ю. С. **Лекции по дифференциальным уравнениям.** 20 л. 83 коп.

Комиссарук А. М. **Афинная геометрия.** 22 л. 90 коп.

Мелешко Л. О. **Молекулярная физика и введение в термодинамику.** 25 л. 1 р. 01 к.

Матвеев Н. М. **Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** Изд. 5-е, доп. 25 л. 1 р. 01 к.

Элементы линейной алгебры. Под ред. Н. В. Поповой. 16 л. 69 коп.

Яглом И. М. **Введение в геометрию окружностей.** 25 л. 1 р. 08 к.

Заказы на эти книги направляйте по адресам:

220005, Минск, Ленинский пр., 48, книжный магазин № 13, «Научно-техническая книга»;

220660, Минск, пл. Свободы, 19, книжный магазин № 31, «Книга — почтой».